Klassische Polynom–Interpolation.

Bestimme ein Polynom (höchstens) n–ten Grades

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

das die gegebenen Daten interpoliert, d.h. $p_n(x_i) = f_i$, $0 \leq i \leq n$.

Erster Lösungsansatz:

Die Interpolationsbedingungen ergeben ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n & = & f_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n & = & f_1 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & = & \vdots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n & = & f_n
\end{array}$$

Vandermonde–Matrix.

Die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

kurz

$$V \cdot a = f$$

heißt Vandermonde–Matrix.

Satz:

Für die Determinante der Vandermonde–Matrix $V = V(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ gilt

$$\det V(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Existenz und Eindeutigkeit der Interpolation.

Folgerung: Falls die Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschieden sind, so ist die Vandermonde–Matrix V regulär.

Satz: Zu paarweise verschiedenen Stützstellen

$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$$

und Funktionswerten

$$f_0, f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$$

gibt es genau ein interpolierendes Polynom p_n vom Höchstgrad n mit

$$p_n(x_i) = f_i \qquad \text{für alle } 0 \leq i \leq n$$

Aber: Wir berechnen die Lösung auf Grund der Komplexität **nicht** über das lineare System $V \cdot a = f$.

Kapitel 7. Interpolation

7.2. Interpolationsformeln nach Lagrange und Newton

Langrange–Darstellung.

Definieren Lagrange–Polynome

$$\begin{aligned} L_j(x) \quad &:= \quad \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{j-1})\cdot(x-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_j-x_{j-1})\cdot(x_j-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x_j-x_n)} \\ &= \quad \prod_{i=0,i\neq j}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)} \qquad \text{für } 0 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Dann ist L_j ein Polynom vom Grad n, und es gilt

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & : \quad i = j \\ 0 & : \quad i \neq j \end{cases} \qquad \text{für } 0 \leq i, j \leq n.$$

Lösung mit der Lagrange–Darstellung.

Die Interpolationsaufgabe

$$p_n(x_i) = f_i \qquad \text{für alle } 0 \leq i \leq n$$

wird gelöst durch das (eindeutige) Polynom $p_n(x)$

$$p_n(x) := f_0 L_0(x) + \ldots + f_n L_n(x) = \prod_{i=0}^{n} f_i L_i(x)$$

Die obige Darstellung von p_n heißt Lagrange–Darstellung.

Beispiel: Wir betrachten die Daten

x_j	0	1	2	3
f_j	0	0	4	18

Beispiel zur Lagrange–Darstellung.

Wir betrachten die Daten

x_j	0	1	2	3
f_j	0	0	4	18

Dann sieht die zugehörige Lagrange–Basis wie folgt aus.

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \qquad L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \qquad L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$

Das interpolierende kubische Polynom p_3 besitzt die Darstellungen

$$\begin{aligned} p_n(x) &= 4 \cdot L_2(x) + 18 \cdot L_3(x) \\ &= -4\,\frac{x(x-1)(x-3)}{2} + 18\,\frac{x(x-1)(x-2)}{6} \\ &= x^3 - x^2 \end{aligned}$$

Interpolation in der Newton–Darstellung.

Betrachte die Newton–Basis

$$\omega_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j) \qquad \text{für } 0 \leq i \leq n.$$

Dann gibt es *eindeutige* Newton–Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} c_i \omega_i(x) \\ &= c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Die obige Darstellung von p_n heißt Newton–Darstellung.

Beachte: Es gilt

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= c_0 \\ p_n(x_1) &= c_0 + c_1(x_1 - x_0) \\ p_n(x_2) &= c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Berechnung der Newton–Koeffizienten.

Beachte: Aus den Interpolationsbedingungen folgt

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= c_0 \stackrel{!}{=} f_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = f_0 \\ p_n(x_1) &= c_0 + c_1(x_1 - x_0) \stackrel{!}{=} f_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \\ \vdots &= \vdots \\ p_n(x_n) &= c_0 + c_1(x_n - x_0) + \ldots + c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1}) \\ &\stackrel{!}{=} f_n \end{aligned}$$

mit

$$c_n = \frac{1}{\omega_n(x_n)}\left(f_n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \omega_i(x_n)\right)$$

Folgerungen aus der Newton–Darstellung.

- Zur Berechnung von c_j benötigt man nur die ersten $(j+1)$ Daten

$$(x_0, f_0), \ldots, (x_j, f_j)$$

Notation:

$$c_j = f[x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j] \qquad \text{für } j = 0, 1, \ldots, n$$

- Nimmt man ein Datum (x_{n+1}, f_{n+1}) hinzu, so gilt:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + c_{n+1}\omega_{n+1}(x)$$

mit

$$c_{n+1} = \frac{f_{n+1} - p_n(x_{n+1})}{\omega_{n+1}(x_{n+1})}$$

Die Methode der dividierten Differenzen.

Satz: Die Koeffizienten

$$c_j = f[x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j] \qquad \text{für } j = 0, 1, \ldots, n$$

des interpolierenden Newton–Polynoms

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i\omega_i(x)$$

sind gegeben durch die dividierten Differenzen

$$\begin{aligned} f[x_j] &= f_j \\ f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \end{aligned}$$

Effiziente Berechnung der dividierten Differenzen.

Rekursives Berechnungsschema der dividierten Differenzen für $n = 3$.

x	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
x_0	f_0			
x_1	f_1	$f[x_0, x_1]$		
x_2	f_2	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	f_3	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

Zum Beispiel:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{1}{x_3 - x_1}\left(\frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}\right)$$

Der Interpolationsfehler.

Für das Interpolationspolynom gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= f(x) - p_n(x) \\ &= f(x) - [p_{n+1}(x) - c_{n+1}\omega_{n+1}(x)] \\ &= f[x_0, \ldots, x_n, x]\,\omega_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Satz: Sei $f \in C^{n+1}([a, b])$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f[x_0, \ldots, x_{n+1}] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Folgerung: Für den Interpolationsfehler gilt die Abschätzung

$$|f(x) - p_n(x)| \le \frac{1}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot |\omega_{n+1}(x)|$$

Tschebyscheff–Knoten.

Beachte: Ein Term des Interpolationsfehlers ist das Knotenpolynom

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Optimierungsproblem: Bestimme die Knoten $x_0, x_1, \ldots, x_n$, so dass

$$\max_{x_0,\ldots,x_n \in [a,b]} \left| \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \right|$$

minimal auf $[a, b]$ ist.

Lösung: Für das Intervall $[-1, 1]$ sind die Tschebyscheff–Knoten optimal

$$x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right) \qquad \text{für } j = 0, 1, \ldots, n$$

Kapitel 7. Interpolation

7.3. Spline–Interpolation

Sei Δ_n eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$:

$$\Delta_n \quad : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

mit Teilintervallen $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Definition: Eine Funktion $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt kubischer Spline, falls

- $S \in \mathcal{C}^2([a, b])$, d.h. S ist zweimal stetig differenzierbar auf $[a, b]$,
- S ist auf jedem Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$, $1 \leq j \leq n$ ein kubisches Polynom:

$$S(x)\,\big|_{[x_{j-1},x_j]} = s_j(x) = a_j + b_j(x - x_{j-1}) + c_j(x - x_{j-1})^2 + d_j(x - x_{j-1})^3$$

Ziel: Interpolation der Daten (x_j, f_j), $0 \leq j \leq n$ mit kubischen Spline S, so dass

$$S(x_j) = f_j \quad \text{für } 0 \leq j \leq n.$$

Interpolation mit kubischen Splines.

Beobachtung:

Ein kubischer Spline besitzt $4n$ Parameter, die wie folgt bestimmt werden.

- Interpolationseigenschaft:

$$s_j(x_{j-1}) = f_{j-1} \quad \text{und} \quad s_j(x_j) = f_j \qquad \text{für alle } 1 \leq j \leq n,$$

- Stetigkeit der Ableitung:

$$s_j'(x_j) = s_{j+1}'(x_j) \qquad \text{für alle } 1 \leq j \leq n-1,$$

- Stetigkeit der zweiten Ableitung:

$$s_j''(x_j) = s_{j+1}''(x_j) \qquad \text{für alle } 1 \leq j \leq n-1.$$

Dies sind insgesamt $(4n-2)$ Gleichungen für $4n$ Parameter.

Resultat: Es fehlen noch zwei Bedingungen!

Zwei weitere Nebenbedingungen.

Definition: Ein kubischer Spline heißt

- natürlicher Spline, falls $S''(a) = S''(b) = 0$,
- periodischer Spline, falls $S^{(i)}(a) = S^{(i)}(b)$, $i = 0, 1, 2$,
- allgemeiner Spline, falls $S'(a) = f'(a)$, $S'(b) = f'(b)$.

Beachte: Jede drei obigen Bedingungen liefert zwei weitere Gleichungen.

Satz: Unter allen interpolierenden $\mathcal{C}^2$–Funktionen minimiert der natürliche kubische Spline das Funktional

$$I[y] := \int_a^b (y''(x))^2 dx$$

Bemerkung: Das Funktional I mißt die Krümmung von y *approximativ*.

Berechnung des natürlichen kubischen Splines.

Sei S auf dem Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$ gegeben durch

$$s_j(x) = a_j + b_j(x - x_{j-1}) + c_j(x - x_{j-1})^2 + d_j(x - x_{j-1})^3$$

so gilt

$$\begin{aligned} a_j &= f_{j-1} \\ b_j &= \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{2M_{j-1} + M_j}{6} h_j \\ c_j &= \frac{M_{j-1}}{2} \\ d_j &= \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j} \end{aligned}$$

wobei $h_j = x_j - x_{j-1}$ für $1 \leq j \leq n$.

Die Momente $M_j = S''(x_j)$ lösen ein lineares System mit *Tridiagonalmatrix*.

Herleitung des Splines mit Momentenmethode.

Der gewählte Ansatz

$$M_j := S''(x_j), \quad \text{für } 0 \leq j \leq n,$$

heißt Momentenmethode: $s_j''(x)$ ist eine Gerade mit

$$s_j''(x) = M_{j-1} + \frac{M - j - M_{j-1}}{h_j}(x - x_{j-1}) \qquad \text{mit } h_j = x_j - x_{j-1}$$

Zweifache Integration über Intervall $[x_{j-1}, x]$ liefert

$$\begin{aligned} s_j'(x) &= B_j + M_{j-1}(x - x_{j-1}) + \frac{M_j - M_{j-1}}{2h_j}(x - x_{j-1})^2 \\ s_j'(x) &= A_j + B_j(x - x_{j-1}) + \frac{M_{j-1}}{2}(x - x_{j-1})^2 + \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}(x - x_{j-1})^3 \end{aligned}$$

mit den Integrationskonstanten A_j, B_j.

Lösung der Bedingungsgleichungen.

Aus den Interpolationsbedingungen $s_j(x_{j-1}) = f_{j-1}$ und $s_j(x_j) = f_j$ folgt direkt

$$A_j = f_{j-1} \quad \text{und} \quad B_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(M_j + 2M_{j-1}) \tag{1}$$

mit der Stetigkeit von S' bei x_j, $1 \leq j < n$, d.h. $s_j'(x_j) = s_{j+1}'(x_j)$ weiterhin

$$B_j + \frac{M_j + M_{j-1}}{2} h_j = B_{j+1} \qquad \text{für } 1 \leq j \leq n-1. \tag{2}$$

Einsetzen von (1) in (2) ergibt schließlich $n-1$ lineare Gleichungen

$$h_j M_{j-1} + 2(h_j + h_{j+1})M_j + h_{j+1}M_{j+1} = 6\left(\frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j}\right)$$

$1 \leq j \leq n-1$, für die $n-1$ *unbekannten* Momente $M_1, \dots, M_{n-1}$.

Beachte: Die Momente $M_0 = 0$ und $M_n = 0$ sind bereits *bekannt*.

Tridiagonalsystem für die Momente.

Das hergeleitete $(n-1) \times (n-1)$ lineare System hat die Form

$$\begin{pmatrix} 2k_1 & h_2 & & & \\ h_2 & 2k_2 & h_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-2} & 2k_{n-2} & h_{n-1} \\ & & & h_{n-1} & 2k_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

mit $h_j = x_j - x_{j-1}$, $1 \leq j \leq n$, $k_j = h_j + h_{j+1}$, $1 \leq j \leq n-1$, und

$$d_j = 6\left(\frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j}\right) \qquad \text{für } 1 \leq j \leq n-1,$$

sowie den Randwerten $M_0 = M_n = 0$.

Abschließende Bemerkungen zu Splines.

- Der natürliche kubische Spline kann effizient berechnet werden, nämlich durch Lösen des Tridiagonalsystems in nur $O(n)$ Schritten.
- Ein interpolierender Spline vermeidet (unerwünschte) Oszillationen.
- Für $f \in \mathcal{C}^4$ gilt die asymptotische Fehlerabschätzung

$$|f(x) - S(x)| = O(h^4), \quad h \to 0$$

  wobei $h = \max_{1 \leq j \leq n} h_j$.
- Verwendet man einen vollständigen Spline mit Randbedingungen

$$S'(a) = f'(a) \quad \text{und} \quad S'(b) = f'(b)$$

  so erhält man ein Tridiagonalsystem, das effizient gelöst werden kann.
- Verwendet man periodische Splines, so erhält man kein Tridiagonalsystem. Die Lösung kann dennoch effizient in $O(n)$ Schritten berechnet werden.

Kapitel 8. Integration

8.1. Das bestimmte Integral

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine *beschränkte* Funktion auf einem Kompaktum $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definition: Eine Menge der Form

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

nennt man eine Zerlegung (Partition, Unterteilung) des Intervalls $[a, b]$.

Die Feinheit der Zerlegung ist dabei

$$\|Z\| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

Man bezeichnet mit $\mathbf{Z}$ bzw. $\mathbf{Z}[a, b]$ die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$.