Vorlesung 19.5.2014 (Kiani)

# Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

**Satz:** *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann gilt:*

*(a) Die Funktion*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

*ist eine Stammfunktion von* $f(x)$. D.h. $F'(x) = f(x)$

*(b) Ist* $F(x)$ *eine Stammfunktion von* $f(x)$*, so gilt*

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a).$$

# Bemerkungen.

- Teil (a) des Hauptsatzes gilt auch für *stückweise stetige* Funktionen $f(x)$. An den Unstetigkeitsstellen ist die Stammfunktion allerdings nur **einseitig differenzierbar** mit

$$F'(x^-) = \lim_{x \to x^-} f(x) \quad \text{und} \quad F'(x^+) = \lim_{x \to x^+} f(x).$$

- Eine Stammfunktion $F$ einer Funktion $f(x)$ nennt man das unbestimmte Integral von $f(x)$ und man schreibt

$F' = f$

$$C + F = \int f(x)\, dx$$

Die Funktion F ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

$$(x^{n+1})' = (n+1)x^n \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \square$$

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$$

**Beispiele.** Wir bezeichnen mit C stets die Integrationskonstante.

Beweis: rechte Seite ableiten

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad \text{für } n \neq -1$$

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\right)' = \frac{(n+1)x^n}{n+1}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C \qquad \text{für } x \neq 0$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{x^k}\,dx = \int x^{-k}\,dx \overset{*}{=} \begin{cases} \dfrac{x^{-k+1}}{-k+1} + C & k \neq 1 \\ \log|x| + C \end{cases}$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

$$\int \tan(x)\,dx = -\log|\cos(x)| + C \qquad \text{für } \cos(x) \neq 0$$

$$\int \cot(x)\,dx = \log|\sin(x)| + C \qquad \text{für } \sin(x) \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + C \qquad \text{für } x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{1-k} \cdot x^{-(k-1)}$$

$$= \frac{1}{1-k}\,\frac{1}{x^{k-1}}$$

# Weitere Beispiele.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx &= -\cot(x) + C && \text{für } x \neq k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin(x) + C && \text{für } |x| < 1 \\
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C && \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C && \text{für } |x| > 1 \\
\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C} & && \\
\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C && \text{für } |x| \neq 1. \\
\int e^{ax}\,dx &= \frac{1}{a}e^{ax} + C && \text{für } a \neq 0.
\end{aligned}$$

## Noch mehr Beispiele.

$$\int b^x \, dx = \frac{1}{\log(b)} b^x + C \qquad \text{für } b > 0, b \neq 1.$$

$$\int \log(x) \, dx = x(\log(x) - 1) + C \qquad \text{für } x > 0.$$

$$\int \log_b(x) \, dx = \frac{x}{\log(b)}(\log(x) - 1) + C \qquad \text{für } b > 0, x > 0.$$

$$\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) + C$$

$$\int \cosh(x) \, dx = \sinh(x) + C$$

$$\int \tanh(x) \, dx = \log(\cosh(x)) + C$$

$$\int \coth(x) \, dx = \log(|\sinh(x)|) + C \qquad \text{für } x \neq 0.$$

$$\int \cos(e^x) \cdot e^{2x} \, dx$$

## Linearität

Bsp:

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{x^2}\,dx = \int \frac{3x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}\,dx + \int \frac{2x}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= 3\int \underbrace{1}_{x^0} \cdot dx + 2\int \underbrace{\frac{1}{x}}_{x^{-1}}\,dx + \int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{x^{-2}} \cdot dx$$

$$= 3\,\frac{x^1}{1} + 2\log|x| + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$$

# Wichtige Integrationsregeln.

**Satz** (Linearität): *Sind* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stückweise stetig, so gilt*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

*für alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. ■

**Satz** (Partielle Integration): *Sind* $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar, so gilt*

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx}$$

*für unbestimmte Integrale, womit für bestimmte Integrale folgt*

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\, dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\, dx.}$$

**Beweis:** folgt direkt aus Produktregel der Differentiation: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. ■

$$\int_a^b (u(x)\cdot v(x))' \, dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx$$

$$\underbrace{\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b}_{u(b)v(b)-u(a)v(a)} - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Kettenregel

$$\int \frac{d}{dt} F(x(t))\,dt = \int F'(x)\cdot \dot{x}(t)\,dt$$

$$F(x(t)) = \int f(x(t))\,\dot{x}(t)\,dt$$

$$= \int f(x)\,dx$$

mit $F' = f$

Formal

$$\int_a^b f(x)\,\dot{x}(t)\,dt = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x)\frac{dx}{\cancel{dt}}\,\cancel{dt}$$

# Die Substitutionsregel.

**Satz:** *Ist* $h : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ *stetig differenzierbar und* $f : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig mit Stammfunktion* $F(x)$, *so gilt*

$$\int f(h(t))h'(t)\,dt = F(h(t)).$$

*Für bestimmte Integrale erhält man somit*

$$\int_a^b f(h(t))h'(t)\,dt = F(h(b)) - F(h(a)) = \int_{h(a)}^{h(b)} f(x)\,dx.$$

**Beweis:** folgt direkt aus Kettenregel der Differentiation:

$$\frac{d}{dt}(F(h(t))) = f(h(t)) \cdot h'(t).$$

■

Bsp:

$$\int \cos(2x)\,dx$$

$$u = 2x$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2$$

$$du = 2\,dx$$

$$\frac{du}{2} = dx$$

$$\int \cos(u)\,\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos(u)\,du = \frac{\sin(u)}{2} + C$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \cos(2x)\,dx = \int_{u(-\pi/4)}^{u(\pi/4)} \frac{\cos(u)}{2}\,du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(u)\,du}{2}$$

# Beispiele.

- Linearität:

$$\int (28x^3 + 12x^2 - 2x + 3)\,dx = 7x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + C$$

- Partielle Integration: $\int uv' = u \cdot v - \int u'v$

$u = x \quad u' = 1$

$v' = e^x \quad v = e^x$

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v'}\,dx = \underbrace{xe^x}_{u \cdot v} - \int \underbrace{e^x}_{v} \cdot \underbrace{1}_{u'}\,dx = (x-1)e^x + C$$

$xe^x - e^x - C$

- Partielle Integration:

$1 = v' \quad u = \log(x)$

$v = x \quad u' = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} \int \log(x)\,dx &= \int \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{\log(x)}_{u}\,dx \\ &= \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{\log(x)}_{u} - \int \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\,dx \\ &= x(\log(x) - 1) + C \end{aligned}$$

□

# Ein weiteres Beispiel zur partiellen Integration.

$u' = \cos(x)$

$v = -\cos(x)$

$$\underbrace{I = \int \sin^2(x)\,dx} \;=\; \int \overset{u}{\sin(x)} \cdot \overset{v'}{\sin(x)}\,dx \;-\int \cos(x)(-\cos(x))\,dx$$

$$= \underset{u}{\sin(x)}\underset{v}{(-\cos(x))} + \int \cos^2(x)\,dx$$

$$= -\sin(x)\cos(x) + \int (1 - \underbrace{\sin^2(x)})\,dx \qquad \Big| + I$$

$$I = -\sin(x)\cos(x) + \int 1\,dx - I$$

$$\Longrightarrow \quad 2\underbrace{\int \sin^2(x)\,dx}_{I} = -\sin(x)\cos(x) + x + C$$

$$\Longrightarrow \quad \int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C$$

□

Subst:

$$\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \cos(t^2)\cdot 4t \cdot dt$$

$u = t^2$ $\quad t = \sqrt{u}$

$\frac{du}{dt} = 2t \quad du = 2t\,dt$

$dt = \frac{du}{2t} = \frac{du}{2\sqrt{u}}$

$$\cos(u)\cdot 4\sqrt{u}\cdot \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$= \int_{u(0)}^{u(\sqrt{\pi/4})} 2\cos(u)\,du = \int_0^{\pi/4} \dots$$

$$= \left[2\sin(u) + C\right]_0^{\pi/4}$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + C - \left(2\sin(0) + C\right)$$

$\sqrt{1-z^2}$ Idee: für welche $z$ ist $1-z^2$ quadrat.?

# Ein Beispiel zur Substitutionsregel.

$\boxed{\frac{x}{a} = \cos(t)}$

Substituiere $x = h(t) = a\cos(t)$ in

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1-(x/a)^2}\,dx = \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2(t)}(-a\sin(t))\,dt, \qquad x = a\cos(t)$$

$$\int \sqrt{\sin^2 t} \quad (-a\sin t)\,dt$$

denn

$$dx = -a\sin(t)\,dt \qquad h(0) = a \quad \text{und} \quad h(\pi) = -a. \qquad \frac{dx}{dt} = -a\sin(t)$$

$$= -a\int_{t(-a)}^{t(a)} \sin^2(t)\,dt = -a\int_{\pi}^{0} \sin^2 t\,dt$$

Somit gilt

$x = a \longrightarrow$

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1-(x/a)^2}\,dx = \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2(t)}\,(-a\sin(t))\,dt$$

$1 = \frac{a}{a} = \cos(t)$

$t = 0$

$$= a\int_{0}^{\pi} \sin^2(t)\,dt$$

$$= \frac{a}{2}(t-\sin(t)\cos(t))\Big|_0^{\pi} = \frac{a\pi}{2}. \quad \square$$

$x = -a$

$-1 = \frac{-a}{a} = \cos(t)$

$t = \pi$

Add. theorem

$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$

$\sin^2(t) = \frac{1}{2}(1-\cos(2t))$

$= a\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)\right)dt$

# Ein weiteres Beispiel zur Substitutionsregel.

$x = t^2$

$\frac{dx}{dt} = 2t$ $\quad dx = 2t \cdot dt$

Substituiere $x = h(t) = t^2$, d.h. $t = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$ in

oder:

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^t\,2t\,dt$$

$\sqrt{x} = t = x^{\frac{1}{2}}$

$v' \quad u$

denn es gilt

$$h'(t) = 2t.$$

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$v' \cdot u$

$\int e^t \cdot 2t\,dt = 2t \cdot e^t - \int e^t \cdot 2\,dt$

$= 2te^t - 2e^t + C$

Daraus folgt

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'$

$u = 2t \quad u' = 2$

$v' = e^t \quad v = e^t$

$$
\begin{aligned}
\int e^{\sqrt{x}}\,dx &= \int e^t\,2t\,dt \\
&= 2(t-1)e^t + C \\
&= 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C.
\end{aligned}
$$

$2\sqrt{x}\,dt = dx$

$2t\,dt = dx$

□

# Bemerkung.

- Nicht jedes Integral lässt sich explizit "lösen", d.h.
- nicht jede (integrierbare) Funktion besitzt "einfache" Stammfunktion bzw.
- manche Stammfunktionen lassen sich nicht durch Komposition von elementaren Funktionen darstellen.

**Beispiele:**

$$\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt \qquad (\texttt{Integralsinus})$$

$$\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad (\texttt{Fehlerfunktion})$$

$$E(x,k) := \int_0^x (1-k^2\sin^2 t)^{\pm\frac{1}{2}}\,dt \qquad (\texttt{Elliptische Integrale})$$

$\square$

# Mittelwertsatz der Integralrechnung.

**Satz:** *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig,* $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar und* $p(x) \geq 0$ *für* $a \leq x \leq b$. *Dann existiert ein* $\xi \in [a, b]$ *mit*


$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b p(x)\,dx.$$

Speziell $p \equiv 1$: $\int_a^b f(x)\cdot 1 \cdot dx = f(\xi)\cdot\int_a^b 1\,dx = f(\xi)\cdot x\Big|_a^b = f(\xi)(b-a)$

**Beweis:** Da $f(x)$ stetig und $p(x) \geq 0$ folgt:

$$\min(f[a,b])\cdot p(x) \leq f(x)p(x) \leq \max(f[a,b])\cdot p(x).$$

Integration über $[a, b]$ liefert:

$$\min(f[a,b])\cdot\int_a^b p(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)p(x)\,dx \leq \max(f[a,b])\cdot\int_a^b p(x)\,dx.$$

Die Behauptung folgt dann aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen. ∎

MWS

Spezialfall

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $b > a$

$m := \min(f[a,b])$ $M := \max(f[a,b])$

$$\int_a^b \underline{\underline{m}}\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b M \cdot dx$$

$$m \int_a^b 1\, dx = m\,(\underline{b-a}) \leq \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{(b-a)} \cdot (\underline{b-a}) \leq M \cdot (\underline{b-a})$$

$$\min f = m \leq \alpha \leq M = \operatorname{Max} f$$

$$\exists \xi : f(\xi) = \alpha$$

# Mittelwertsatz der Integralrechnung: Spezialfall.

Für den Spezialfall $p \equiv 1$ gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$

**Beobachtung:** Schreibt man diese Beziehung als

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a)$$

mit der Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, so folgt der `Mittelwertsatz der Differentialrechnung` für die Stammfunktion $F(x)$:

$$F'(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \qquad \text{für ein } \xi \in [a, b].$$

$\square$

**Der Satz von Taylor.** Man erhält die Taylor-Entwicklung einer Funktion $f \in C^{n+1}$ um $x_0$ durch $n$-fache partielle Integration:

$$1 = (x-t)^0 = v'$$

$$
\begin{aligned}
\underline{f(x) - f(x_0)} &= \int_{x_0}^{x} 1 \cdot f'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^0}_{v'} \underbrace{f'(t)}_{u}\,dt \\
&= (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)^1 f''(t)\,dt \\
&= (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} (x-t)^2 f'''(t)\,dt \\
&\;\;\vdots \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

$$v = \int (x-t)^0\,dt$$

$$w = x - t$$

$$\frac{dw}{dt} = -1$$

$$v = \int w^0 (-1)\,dw = \frac{w^1}{1} \cdot (-1) = \frac{(x-t)^1}{-1}$$

Daraus bekommt man die Lagrange-Restgliedformel aus Mittelwertsatz:

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1} \qquad \text{für ein } \xi \in [x_0, x].$$

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} 1 \cdot f'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^0}_{v'} \underbrace{f'(t)}_{u}\,dt$$

$$= \Big[\underbrace{-(x-t)}_{v}\ \underbrace{f'(t)}_{u}\Big]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \underbrace{-(x-t)}_{v}\ \underbrace{f''(t)}_{u'}\,dt \qquad v = \frac{(x-t)^1}{-1}$$

$$= -(x-x)f'(x) - \big(-(x-x_0)f'(x_0)\big) + \int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^1}_{h'}\ \underbrace{f''(t)}_{g}\,dt$$

$$h \cdot \quad g \qquad\qquad w$$

$$= (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-t)}{-2} f''(t)\Big|_{x_0}^{x} \qquad h = \int (x-t)^1\,dt$$

$$h = \frac{(x-t)^2}{-2}$$

$$- \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^2}{-2} f'''(t)$$

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \left[ \frac{(x-x)^2}{-2} f''(x) - \frac{(x-x_0)^2}{-2} f''(x_0) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} (x-t)^2 f'''(t) \, dt$$

$$= \underbrace{f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x_0)}_{T_2(x;x_0)}$$

$$+ \frac{1}{2} \int (x-t)^2 f'''(t) \, dt$$

$$= T_n(x;x_0) + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \, dt}_{R_n}$$

MWS $\quad R_n = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^{x} (x-t)^n \, dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \left. \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)(-1)} \right|_{x_0}^{x}$

## 10.4 Integration rationaler Funktionen

**Ziel:** Integration rationaler Funktionen

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{wobei} \qquad p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k.$$

Also $\frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}$

**Methode:** Partialbruch-Zerlegung von rationaler Funktion $R(x)$.

**Ansatz:**

$$\begin{aligned} R(x) \quad &= p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[ \frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\ &\quad + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[ \frac{\gamma_{j1} x + \delta_{j1}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j} x + \delta_{jk_j}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^{k_j}} \right] \end{aligned}$$

## Erläuterungen.

$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$   Bsp: $\frac{x^4+x^3+2x^2}{x^3+x} = \tilde{R}(x) = \frac{x(x^3+x^2+2x)}{x(x^2+1)}$

- Ohne Einschränkung: $p(x)$ und $q(x)$ haben keine gemeinsamen Nullstellen.

also • erst kürzen

$\tilde{R}(x) = \frac{x^3+x^2+2x}{x^2+1}$

- Das Polynom $p_1(x)$ tritt nur auf, falls

$$\deg(p) \geq \deg(q).$$

In diesem Fall berechnet man $p_1(x)$ mit Polynomdivision, und es gilt

• falls grad(Zähler) ≥ grad Nenner

$$\frac{p_2(x)}{q(x)} = R(x) - p_1(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad p(x) = p_1(x) \cdot q(x) + p_2(x),$$

mit $\deg(p_2) < \deg(q)$.

$x^3 + x^2 + 2x : (x^2+1) = x+1$
$-\ x^3 \qquad + x$
$x^2 + x$
$x^2 + 1$
$x - 1 = \text{Rest}$

- Das Nennerpolynom $q(x)$ besitze
  - die **reellen** Nullstellen $x_j$ mit Vielfachheit $k_j$;
  - die **komplexen** Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$ mit Vielfachheit $k_j$ und damit komplex konjugierte Nullstellen $\bar{z}_j = a_j - ib_j$.

$\Longrightarrow$

$\tilde{R}(x) =$

$$(x^3+x^2+2x) = (x^2+1)(x+1) + x-1$$

$$\int \frac{x^3+x^2+2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{(x^2+1)(x+1)}{x^2+1}\,dx + \int \frac{(x-1)}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int \underbrace{(x+1)}_{p_1(x)}\,dx + \int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx$$