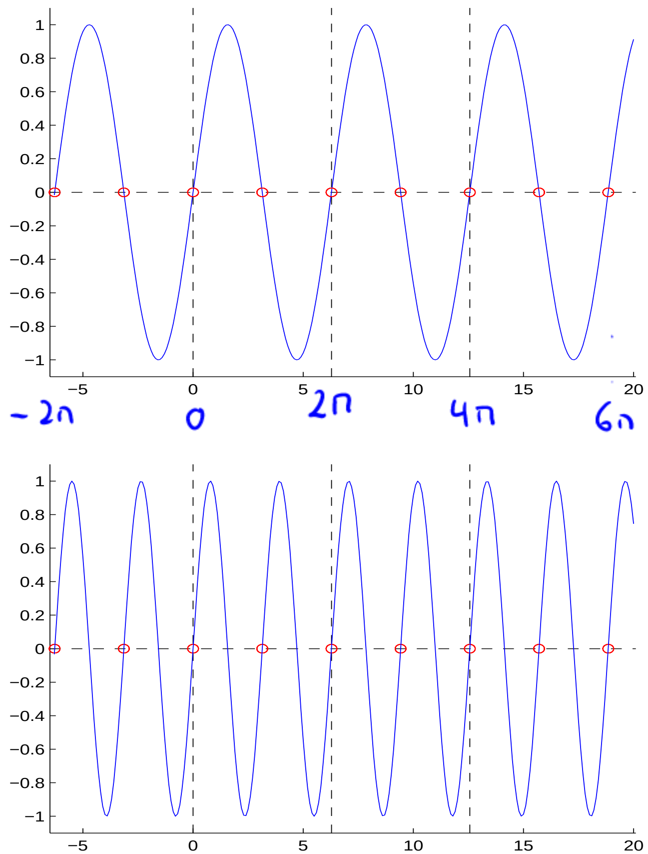
Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. H. P. Kiani

Vorlesung Analysis II, H. P. Kiani, SoSe 2014

Folien von Prof. Iske mit Ergänzungen
SoSe 2014

~~Periodischer~~ Funktionen



$$T = 2\pi$$

Abbildung 1: sin (x) und sin (2x)

f **periodisch** mit der Periode $T > 0$: $\boxed{f(t+T) = f(t)\,\forall\, t \in \mathbb{R}}$

Beobachtungen: Seien f und g $T-$periodisch

- $\Longrightarrow$ f ist auch $k \cdot T$ peridisch, $k \in \mathbb{N}$

$$f(t+T) = f(t) \Longrightarrow f(t+kT) = f(t)$$

- $f(kt)$ ist auch $T-$periodisch

$$f(k(t+T)) = f(k \cdot t + \cancel{kT}) = f(kt)$$

Beispiel: $\sin(kt)$, $\cos(kt)$, $k \in \mathbb{N}$ sind $2\pi-$periodisch

- $\alpha f + \beta g$ ist $T-$periodisch

Beispiel: Die Funktionen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) = f_n(t)$$

sind $2\pi-$periodisch

Ziel f $T=2\pi$ periodisch

finde $f_n \approx f$

$f(x) = 1$ auf $[0, 2]$ ungerade, 4-periodisch fortgesetzt

$T = 4$

4-periodische

Sinus/cosinus

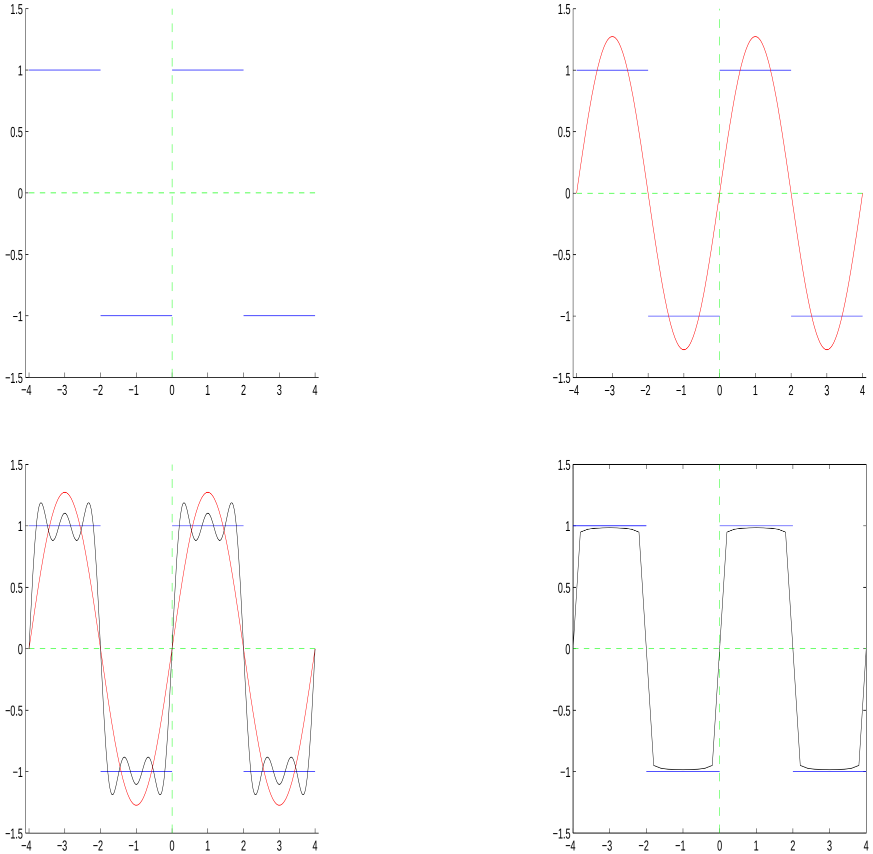


Abbildung 1: abgeschnittene Fourierreihen für f n=1, 7, 39

- Die Funktionen $\sin(k\omega t)$, $\cos(k\omega t)$ sind $T = \frac{2\pi}{\omega}$ −periodisch

  $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$ heißt **Kreisfrequenz**

$$\sin(k\omega(t+T)) = \sin(k\omega t + k\omega T)) = \sin(k\omega t + k \cdot \frac{2\pi}{\cancel{T}} \cdot \cancel{T}))$$

$$= \sin(k\omega t + k2\pi)) = \sin(k\omega t)$$

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Armin Iske
Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Sommersemester 2014

12 Fourier-Analysis

12.1 Grundlegende Begriffe

Definition: *Eine Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(oder* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*) heißt* periodisch mit der Periode T *(oder* T-periodisch*), falls*

$$f(t+T) = f(t) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

□

Ziel: Entwicklung einer T periodischen Funktion f in eine Fourier-Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Grundschwingungen: $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$

Oberschwingungen: $\cos(k\omega t)$, $\sin(k\omega t)$, $k = 2, 3, \ldots$

Zur Erinneung: etwas L.A.

Definiere auf (geeignetem) Funktionenraum V mit Unterraum

$$T_n := \left\{ g : g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \, \cos(k\omega t) \, + \, b_k \sin(k\omega t)\right) \; a_k, b_k \in \mathbb{R}, \right\}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

aller $T-$periodischen **trigonometrischen Polynome vom (Höchst-)Grad n**

das Skalarprodukt

$$\boxed{< f, g > := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot g(t) \, dt \, .}$$

und die Norm

$$\| g \| := \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^T (g(t))^2 \, dt} = \sqrt{< g, g >} \, .$$

Dann ist $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(k\omega t), \sin(k\omega t), \; k = 1, \cdots, n \right\}$ ein Orthonormalsystem.

Für eine gegebene Funktion f aus V ist

$$f_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right) \qquad \text{mit}$$

$$\langle f, \cos(k\omega t)\rangle = a_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t)\, dt\,, \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

$$\langle f, \sin(k\omega t)\rangle \quad b_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t)\, dt\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

die beste Approximation aus T_n, dass heißt

$$\| f - f_n \| \leq \| f - g \| \quad \forall g \in T_n\,.$$

konst. Term $\quad \langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{2} \underbrace{\langle f, \cos(0 \cdot \omega t)\rangle}_{a_0}$

Bemerkungen.

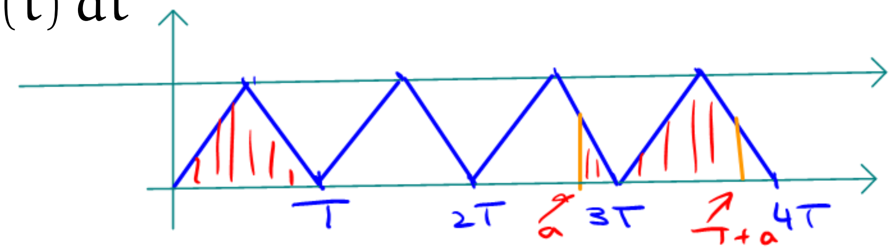
- Ist T eine Periode von f, so auch kT, $k \in \mathbb{Z}$, eine Periode von f.
- Sind T_1 und T_2 Perioden von f, so sind auch

$$k_1 T_1 + k_2 T_2 \qquad \text{für } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

  Perioden von f.

- Existiert eine kleinste positive Periode $T > 0$ von f, so ist die Menge der Perioden von f gegeben durch kT, $k \in \mathbb{Z}$. Jede nichtkonstante, stetige und periodische Funktion f besitzt eine solche kleinste Periode.
- Sind f und g T-periodisch, so ist auch $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, T-periodisch.
- Ist f T–periodisch und integrierbar (über kompakten Intervallen), so gilt

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_a^{a+T} f(t)\,dt$$



  für beliebige $a \in \mathbb{R}$.

Beweis zum letzten Punkt aus Folie 167

$a = k \cdot T + \alpha$ mit einem $k \in Z$ und einem $0 < \alpha < T$

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_{\alpha+kT}^{\alpha+kT+T} f(t)dt$$ Sustitution $\tau = t - k \cdot T$

$t = \tau + kt$

$dt = d\tau$

$$= \int_\alpha^{\alpha+T} f(\tau + \cancel{kT})d\tau = \int_\alpha^{\alpha+T} f(\tau)d\tau$$ Periodizität

$$= \int_\alpha^{T} f(\tau)d\tau + \int_T^{\alpha+T} f(\tau)d\tau$$ Sustitution $v = \tau - T$

$$= \int_\alpha^{T} f(\tau)d\tau + \int_0^{\alpha} f(v + \cancel{T})dv$$

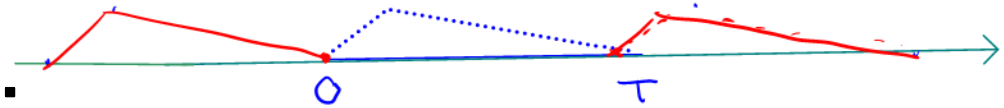
$$= \int_\alpha^{T} f(\tau)d\tau + \int_0^{\alpha} f(v)dv$$ Periodizität

$$= \int_0^{T} f(\tau)d\tau$$

$$\int_0^T = \int_{-T/2}^{T/2}$$

 gespannte Saite

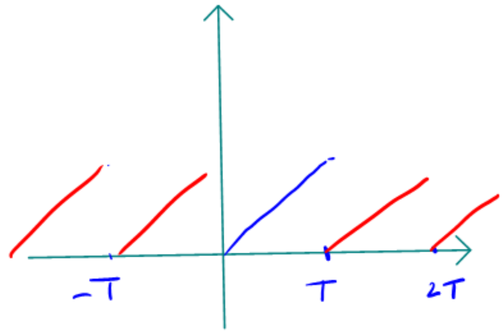
Periodische Fortsetzungen.



Definition: *Eine Funktion* $g(t)$, $t \in [0, T]$ *bzw.* $t \in [0, T/2]$ *läßt sich zu einer* T*-periodischen Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *wie folgt fortsetzen.*

- Direkte Fortsetzung.

$$f(t) := g(t - kT) \qquad \textit{für } kT \leq t < (k+1)T$$

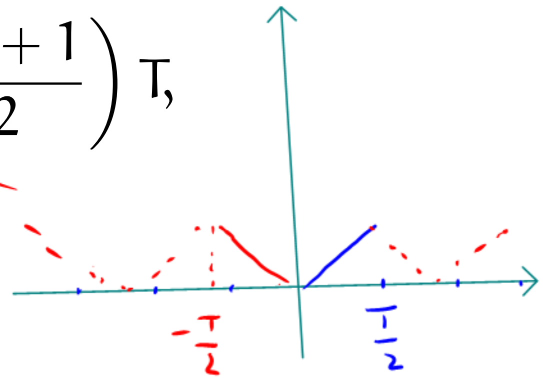


- Gerade Fortsetzung. *Sei* $g(t)$ *auf* $[0, T/2]$ *gegeben. Dann setze*

$$f(t) := g(t - kT) \qquad \textit{für } \left(\frac{2k-1}{2}\right) T \leq t < \left(\frac{2k+1}{2}\right) T,$$

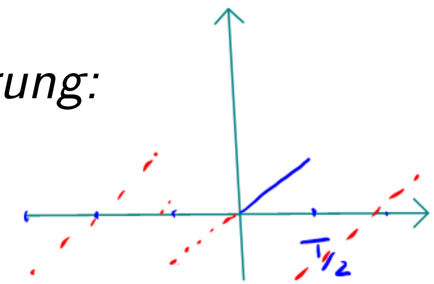
wobei g *zunächst an der* y*-Achse gespiegelt wird:*

$$g(t) := g(-t), \qquad \textit{für } -\frac{T}{2} \leq t < 0.$$



- Ungerade Fortsetzung. *Wie oben, aber Spiegelung um Ursprung:*

$$g(t) := -g(-t), \qquad \textit{für } -\frac{T}{2} \leq t < 0.$$



Fourier-Reihen und trigonometrische Polynome.

Definition:

- *Eine Reihe der Form*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \qquad \textit{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R} \textit{ (oder } \mathbb{C}\textit{)}$$

heisst Fourier-Reihe *(oder* trigonometrische Reihe*). Dabei sei*

$$\omega = \frac{2\pi}{T} > 0.$$

- *Die zugehörigen Partialsummen*

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \qquad \textit{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R} \textit{ (oder } \mathbb{C}\textit{)}$$

der Fourier-Reihe $f(t)$ *heißen* trigonometrische Polynome *vom Grad* n.

Konvergenz? Für welche f? In welcher Norm? □

Vieles einfacher in $\mathbb{C}$

z.B.: Nachweis ONS

Phasenverschiebung $\sin(t+\alpha) = \sin(t)\cos(\alpha) + \cos(t)\sin(\alpha)$

$e^{i(t+\alpha)} = e^{it} \cdot e^{i\alpha}$

Lösung von Diff.gln

Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe.

- Es gilt die Eulersche Formel

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \\ e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x) \end{array} \right.$$

womit

$$\underline{\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)} \qquad \text{und} \qquad \underline{\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)}$$

- Damit lassen sich die trigonometrischen Polynome wie folgt darstellen.

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k}{2}\left(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}\right) + \frac{b_k}{2i}\left(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}\right)\right] \quad \frac{1}{i} = -i \\ &= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{\gamma_0 e^0} + \sum_{k=1}^{n} \left[\underbrace{\frac{a_k - ib_k}{2}}_{\gamma_k} e^{ik\omega t} + \underbrace{\frac{a_k + ib_k}{2}}_{\gamma_{-k}} e^{-ik\omega t}\right] \end{aligned}$$

Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe.

- Somit kann man die trigonometrischen Polynome schreiben als

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

mit den Koeffizienten

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}a_0, \qquad \gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \qquad \gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k),$$

womit gilt

$$a_0 = 2\gamma_0, \qquad a_k = \gamma_k + \gamma_{-k}, \qquad b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k}).$$

- Für die Darstellung der Fourier-Reihe bekommt man somit

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Wichtige Frage: Konvergiert die Fourier-Reihe (punktweise oder gleichmäßig)?

Orthonormalität der Basisfunktionen.

Satz: *Die Funktionen* $e^{ik\omega t}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\omega = 2\pi/T$, *bilden ein* Orthonormalsystem *bezüglich des Skalarprodukts*

$$\langle u, v \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T \overline{u(t)} v(t)\, dt.$$

$e^{ik\omega t}$ ONS

$k \in \mathbb{Z}$

$k \neq \ell$

$< e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t} > \overset{!}{=} 0$

$< e^{ik\omega t}, e^{ik\omega t} > = 1$

Beweis: Einerseits

$$\langle e^{ik\omega t}, e^{ik\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{e^{-ik\omega t} e^{ik\omega t}}_{e^0 = 1}\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T 1\, dt = 1,$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} t \Big|_0^T = \frac{1}{T} \underbrace{(T - 0)}_{= 1}$$

andererseits

$$\langle e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t} \rangle \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\ell-k)\omega t}\, dt = \frac{1}{T \cdot i(\ell - k)\omega} e^{i(\ell-k)\omega t} \Big|_{t=0}^{t=T} = 0$$

für $k \neq \ell$. ■

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{-ik\omega t}\cdot e^{il\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i\omega t(l-k)}\,dt$$

$$\int e^{\alpha\cdot x} = \frac{e^{\alpha\cdot x}}{\alpha}+c$$

$$= \frac{1}{T}\,\frac{e^{i\omega t(l-k)}}{i\omega(l-k)}\Big|_0^T$$

$$A =$$

$$= \frac{1}{Ti\omega(l-k)}\cdot\left[e^{i\omega(l-k)\cdot T}-e^0\right] \qquad \omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$\overset{A}{=}\left[e^{i\frac{2\pi}{\cancel{T}}(l-k)\cancel{T}}-1\right] = \left[\underbrace{\cos\left((l-k)2\pi\right)}_{1}+i\underbrace{\sin\left((l-k)2\pi\right)}_{0}-1\right]\cdot A$$

$$= 1-1 = 0$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten.

Satz: *Konvergiert die Fourier-Reihe*

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

auf $[0, T]$ *gleichmäßig gegen eine Funktion* f*, so ist* f *stetig und es gilt:*

$$\boxed{\gamma_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-ik\omega t}\, dt} \quad \textit{für } k \in \mathbb{Z}.$$

$\int e^{-il\omega t} \longrightarrow \int_0^T$

Beweis: Da f_n stetig und gleichmäßig gegen f konvergieren, ist f stetig.

Weiterhin:

$$\int_0^T f(t) e^{-i\ell\omega t}\, dt = \int_0^T \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k e^{ik\omega t} e^{-i\ell\omega t}\, dt$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k \underbrace{\int_0^T e^{ik\omega t} e^{-i\ell\omega t}\, dt}_{=0 \;\; k \neq \ell} = \gamma_\ell \cdot T. \qquad \blacksquare$$

$\gamma_\ell \cdot \int_0^T e^{il\omega t} \cdot e^{-il\omega t}\, dt = \gamma_k \int_0^T 1\, dt = \gamma_k \cdot T$

Orthonormalität und Fourier-Koeffizienten in $\mathbb{R}$.

$$\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \; k \neq \ell \\ T/2 & : \; k = \ell \neq 0 \\ T & : \; k = \ell = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(\ell\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \; k \neq \ell \\ T/2 & : \; k = \ell \neq 0 \end{cases}$$

Aufg. 2b
H4

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,dt = 0$$

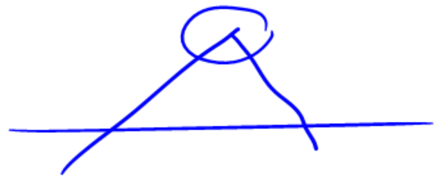
$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \text{für } k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt \quad \text{für } k > 0$$

Frage: für welche f kann ich Fourier-Reihe definieren? Konvergenz?

12.2 Fourier-Reihen

Definition:



- *Eine Funktion* $f : [a, b] \to C$ *heißt* stückweise stetig *bzw.* stückweise stetig differenzierbar, *falls* $f(t)$ *bis auf endlich viele Stellen auf* $[a, b]$ *stetig bzw. stetig differenzierbar ist und in diesen Ausnahmepunkten die einseitigen Grenzwerte von* $f(t)$ *bzw.* $f'(t)$ *existieren.*

- *Für eine stückweise stetige Funktion* $\underline{f : [0, T] \to \mathbb{C}}$ *werden die* Fourier-Koeffizienten *von* $f(t)$ *definiert durch*

$$\gamma_k := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} \, dt \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

Dabei ist $\omega = 2\pi/T$ *die* Kreisfrequenz. □

Bemerkung: Mit den (komplexen) Fourier-Koeffizienten γ_k bekommt man die (reellen) Fourier-Koeffizienten

$e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i\sin(k\omega t)$

$$a_k := \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \qquad \text{für } k \geq 0$$

$$b_k := \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt \qquad \text{für } k > 0$$

Definition: *Die mit den Fourier-Koeffizienten gebildete Reihe*

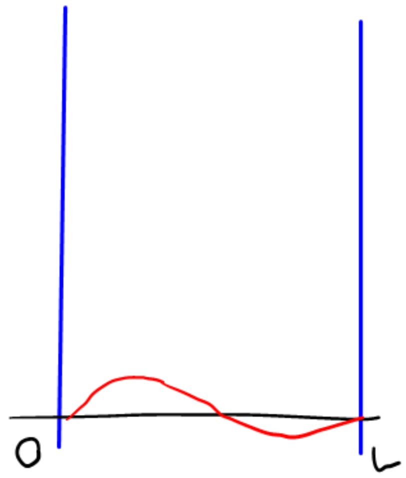
$$F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

heißt die Fourier-Reihe *von* $f(t)$. □

Bemerkung: Bei der obigen Definition verwendet man die **direkte Fortsetzung** der Funktion $f : [0, T] \to \mathbb{C}$ zu einer T-periodischen Funktion. Notation:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}.$$

gelegentlich (z.B. PDEs) nur Sinus / nur Cosinus-Reihe

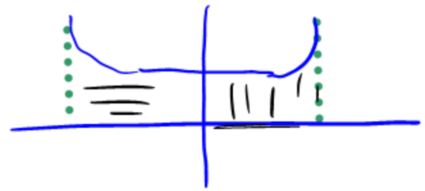


$f(-t) = +f(t)$

$$\begin{array}{llll} & + \quad + & & + \\ f \text{ gerade} \implies & f \cdot \cos(\ldots) & & \text{gerade} \\ & f \cdot \sin(\ldots) & & \text{ungerade} \\ & + \quad - & & - \end{array}$$

$f(-t) = -f(t)$

$$\begin{array}{llll} & - \quad + & & - \\ f \text{ ungerade} \implies & f \cdot \cos(\ldots) & & \text{ungerade} \\ & f \ \sin(\ldots) & & \text{gerade} \\ & - \cdot - & & + \end{array}$$



g gerade T periodisch

$$\int_0^T g(t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} g(t)\,dt = \int_{-T/2}^{0} g(t)\,dt + \int_0^{T/2} g(t)\,dt =$$

$\tau = -t$

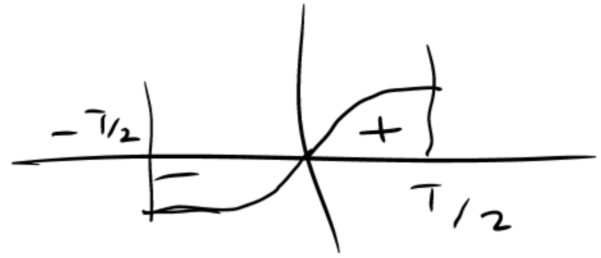
$d\tau = -dt$

$$= \int_{T/2}^{0} g(-\tau)\,(-d\tau) + \int_0^{T/2} g(t)\,dt$$

$$= \int_0^{T/2} g(\tau)\,d\tau + \int_0^{T/2} g(t)\,dt$$

Analog: h ungerade und T-periodisch:

$$\int_0^T h(t)\ dt\ =\ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(t)\,dt\ = 0\,.$$



f gerade:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T \underbrace{f(t)\ \cos(k\omega t)}_{\text{gerade}}\,dt\ =\ \frac{2}{T}\cdot 2\int_0^{T/2} f\cdot\cos(k\omega t)\,dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T \underbrace{f(t)\ \sin(k\omega t)}_{\text{ungerade}}\,dt\ =\ 0$$

f ungerade:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T \underbrace{f(t)\ \cos(k\omega t)}_{\text{ung}}\,dt\ =\ 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T \underbrace{f(t)\ \sin(k\omega t)}_{\text{gerade}}\,dt\ =\ \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt$$

Satz: *Sei* $f(t)$ *eine stückweise stetige,* T*-periodische Funktion. Dann gilt:*

$$f(t) \text{ gerade} \implies a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \text{und} \quad b_k = 0$$

$$f(t) \text{ ungerade} \implies a_k = 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt.$$

Beweis: Beispielsweise gilt für f gerade (argumentiere für f ungerade analog):

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{-T} f(-\tau)\sin(k\omega\tau)\,d\tau \\ &= -\frac{2}{T}\int_{-T}^0 f(\tau)\sin(k\omega\tau)\,d\tau = -\frac{2}{T}\int_0^T f(\tau)\sin(k\omega\tau)\,d\tau = -b_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^0 f(t)\cos(k\omega t)\,dt + \int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} f(-\tau)\cos(k\omega\tau)\,dt + \int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt\right] = \frac{4}{T}\left[\int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt\right]. \end{aligned}$$

$f(t) = t \quad t \in [0, 1]$

$f(-t) = -t$

$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$

auf $[-1, 0]$

$f(t) = t + 1$

Beispiel: Die Sägezahnfunktion.

Betrachte die Sägezahnfunktion

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \quad \text{für } t = 0 \text{ oder } t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \quad \text{für } 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

$$S(-t) = S(-t+2\pi) = \frac{1}{2}\left(\pi - (-t+2\pi)\right) = \frac{1}{2}(-\pi + t) = -S(t)$$

Die Sägezahnfunktion ist ungerade, also gilt (mit $\omega = 1$)

$$a_k = 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi - t}{2}\sin(kt)\,dt = \frac{1}{k}$$

und damit bekommt man die Fourier-Reihe

$$S(t) \sim \sin(t) + \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \ldots$$

Approximation der Sägezahnfunktion durch 10. Partialsumme

$$S_{10}(t) = \sum_{k=1}^{10} \frac{\sin(kt)}{k}.$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \underbrace{\frac{\pi - t}{2}}_{f(t)} \sin(k\omega t)\,dt$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$T = 2\pi$$

$$= \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\frac{\pi - t}{2}}_{u}\ \underbrace{\sin(kt)}_{v'}\,dt$$

$$\int \sin(\alpha\cdot x)\,dx = \frac{-\cos(\alpha\cdot x)}{\alpha} + c$$

$$v(t) = \frac{-\cos(kt)}{k} + c$$

$$= \frac{\cancel{4}}{\cancel{2}\pi}\cdot\frac{\pi - t}{\cancel{2}}\cdot\frac{-\cos(kt)}{k}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{\cancel{4}}{\cancel{2}\pi}\int_0^{\pi} + \frac{1}{\cancel{2}}\left(+\frac{\cos(kt)}{k}\right)dt$$

$$u \cdot \qquad v \cdot$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(\pi - \pi)\ldots - \left((\pi - 0)\left(\frac{-\cos(0)}{k}\right)\right)\right] - \frac{1}{\pi k}\cdot\underbrace{\frac{\sin(kt)}{k}\Bigg|_0^{\pi}}_{0}$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{(-\pi)(-1)}{k} = \frac{1}{k} = b_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(k\omega t)$$

$$= \sum_{1}^{n} \frac{1}{k}\sin(kt)$$

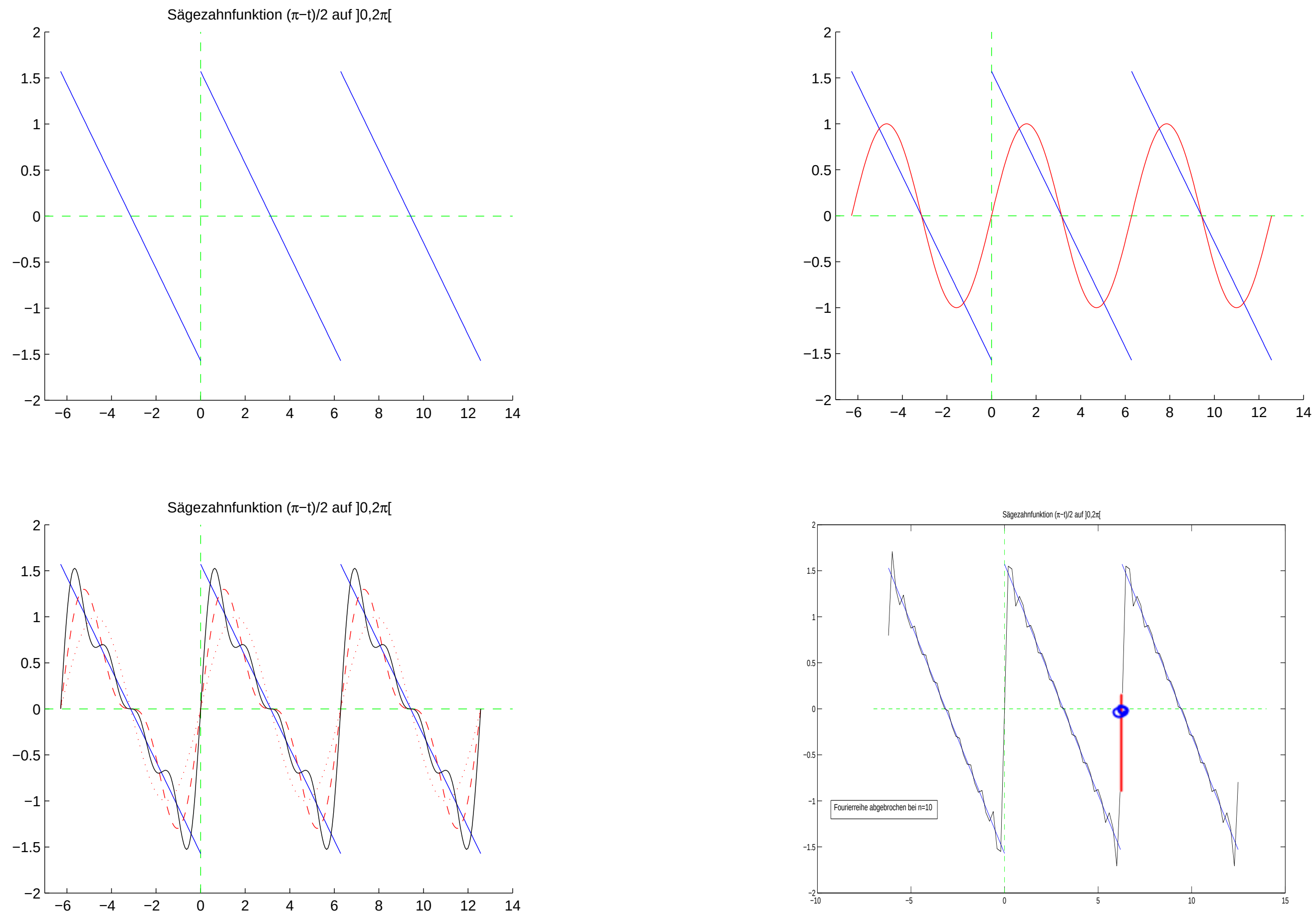
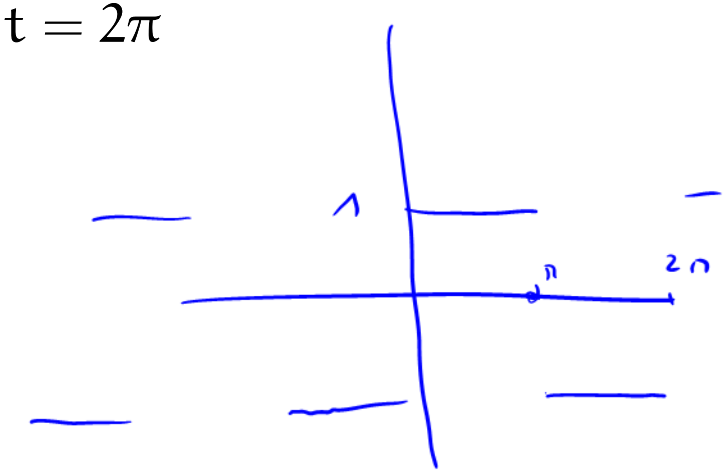


Abbildung 2: Sägezahnfunktion, abgebrochene Fourierreihe für n= 1,2,4,10

Beispiel: Die Rechteckschwingung.

Betrachte die Rechteckschwingung

$$R(t) := \begin{cases} 0 & : \quad \text{für } t = 0, t = \pi \text{ oder } t = 2\pi \\ 1 & : \quad \text{für } 0 < t < \pi \\ -1 & : \quad \text{für } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$



Die Funktion ist ungerade, also gilt:

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(kt)\,dt = \begin{cases} 0 & : \quad \text{für k gerade;} \\ \frac{4}{k\pi} & : \quad \text{für k ungerade.} \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe von $R(t)$ lautet daher

$$R(t) \sim \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \ldots\right).$$

$f(x) = 1$ auf $[0,2]$ ungerade, 4-periodisch fortgesetzt $\Longrightarrow$ $f(x) = -1$ auf $[-2,0]$

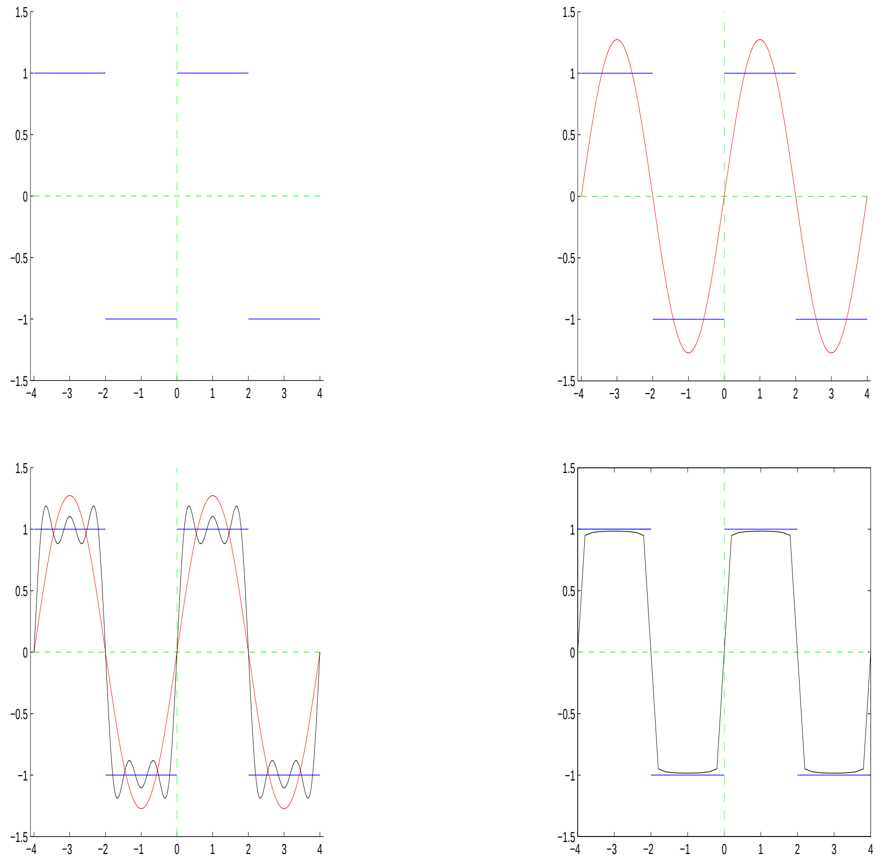


Abbildung 1: abgeschnittene Fourierreihen für f n=1, 7, 39

$a_k = 0$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t)\, dt$$

$\underline{T = 4}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{4}{4} \int_0^2 1 \cdot \sin\left(k \frac{\pi}{2} t\right) dt$$

$$= \left[\frac{-\cos\left(\frac{k\pi}{2} t\right)}{\frac{k\pi}{2}} \right]_0^2 = -\frac{2}{k\pi} \left[\underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} - 1 \right]$$

$$= \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \frac{4}{k\pi} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\sum_{m=1}^{n} b_{2m-1} \sin\left((2m-1)\omega t\right)$$

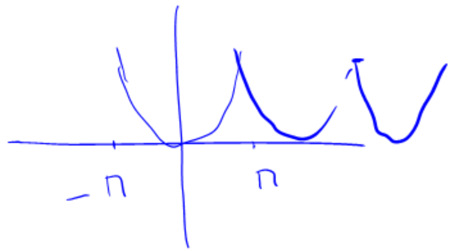
$$= \sum \frac{4}{(2m-1)\pi} \sin\left(\frac{(2m-1)\pi}{2} t\right)$$

Noch ein Beispiel.

T $\shortparallel$ $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

Betrachte $f(t) = t^2$, $-\pi < t < \pi$ mit direkter 2π-periodischer Fortsetzung.

Die Fortsetzung ist gerade, damit folgt $\boxed{b_k = 0}$



$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos(kt)\,dt = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3} & : \quad \text{für } k = 0 \\ (-1)^k \frac{4}{k^2} & : \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Damit bekommt man die Fourier-Reihe

$$f(t) \sim \underset{a_0/2}{\frac{\pi^2}{3}} - \frac{4\cos(t)}{1^2} + \frac{4\cos(2t)}{2^2} \mp \ldots$$

□

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{t^2}_{u}\,\underbrace{\cos(kt)}_{v'}\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[t^2 \frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi} - \int 2t \frac{\sin(kt)}{k}\,dt\right)$$

$k \neq 0$

$$a_0 = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos(0)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 = \frac{2}{\pi}\frac{t^3}{3}\Big|_0^{\pi}$$