# 11 Fourier-Analysis

## 11.1 Grundlegende Begriffe

**Definition:** *Eine Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(oder* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*) heißt* `periodisch mit der Periode T` *(oder* `T-periodisch`*), falls*

$$f(t+T) = f(t) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

$\square$

**Ziel:** Entwicklung einer periodischen Funktion $f$ in eine `Fourier-Reihe`

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right]$$

**Grundschwingungen:** $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$

**Oberschwingungen:** $\cos(k\omega t)$, $\sin(k\omega t)$, $k = 2, 3, \ldots$

## Bemerkungen.

- Ist $T$ eine Periode von $f$, so auch $kT$, $k \in \mathbb{Z}$, eine Periode von $f$.
- Sind $T_1$ und $T_2$ Perioden von $f$, so sind auch

$$k_1 T_1 + k_2 T_2 \qquad \text{für } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

  Perioden von $f$.
- Existiert eine kleinste positive Periode $T > 0$ von $f$, so ist die Menge der Perioden von $f$ gegeben durch $kT$, $k \in \mathbb{Z}$. Jede nichtkonstante, stetige und periodische Funktion $f$ besitzt eine solche kleinste Periode.
- Sind $f$ und $g$ $T$-periodisch, so ist auch $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $T$-periodisch.
- Ist $f$ $T$–periodisch und integrierbar (über kompakten Intervallen), so gilt

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_a^{a+T} f(t)\,dt$$

  für beliebige $a \in \mathbb{R}$.

# Periodische Fortsetzungen.

**Definition:** *Eine Funktion* $g(t)$, $t \in [0, T]$ *bzw.* $t \in [0, T/2]$ *läßt sich zu einer* $T$*-periodischen Funktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *wie folgt fortsetzen.*

- Direkte Fortsetzung.

$$f(t) := g(t - kT) \qquad \textit{für } kT \leq t < (k+1)T$$

- Gerade Fortsetzung. *Sei* $g(t)$ *auf* $[0, T/2]$ *gegeben. Dann setze*

$$f(t) := g(t - kT) \qquad \textit{für } \left(\frac{2k-1}{2}\right)T \leq t < \left(\frac{2k+1}{2}\right)T,$$

*wobei* $g$ *zunächst an der* $y$*-Achse gespiegelt wird:*

$$g(t) := g(-t), \qquad \textit{für } -\frac{T}{2} \leq t < 0.$$

- Ungerade Fortsetzung. *Wie oben, aber Spiegelung um Ursprung:*

$$g(t) := -g(-t), \qquad \textit{für } -\frac{T}{2} \leq t < 0.$$

# Fourier-Reihen und trigonometrische Polynome.

**Definition:**

- *Eine Reihe der Form*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \qquad \textit{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R} \textit{ (oder } \mathbb{C}\textit{)}$$

*heisst* Fourier-Reihe *(oder* trigonometrische Reihe*). Dabei sei*

$$\omega = \frac{2\pi}{T} > 0.$$

- *Die zugehörigen Partialsummen*

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \qquad \textit{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R} \textit{ (oder } \mathbb{C}\textit{)}$$

*der Fourier-Reihe* $f(t)$ *heißen* trigonometrische Polynome *vom Grad* $n$.

$\square$

# Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe.

- Es gilt die Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

womit

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \quad \text{und} \quad \sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

- Damit lassen sich die trigonometrischen Polynome wie folgt darstellen.

$$\begin{aligned}
f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k}{2}\left(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}\right) + \frac{b_k}{2i}\left(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}\right)\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t}\right]
\end{aligned}$$

# Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe.

- Somit kann man die trigonometrischen Polynome schreiben als

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

mit den Koeffizienten

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} a_0, \qquad \gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \qquad \gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k),$$

womit gilt

$$a_0 = 2\gamma_0, \qquad a_k = \gamma_k + \gamma_{-k}, \qquad b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k}).$$

- Für die Darstellung der Fourier-Reihe bekommt man somit

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

**Wichtige Frage:** Konvergiert die Fourier-Reihe (punktweise oder gleichmäßig)?

# Orthonormalität der Basisfunktionen.

**Satz:** *Die Funktionen* $e^{ik\omega t}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\omega = 2\pi/T$, *bilden ein* `Orthonormalsystem` *bezüglich des Skalarprodukts*

$$\langle u, v \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T \overline{u(t)} v(t)\, dt.$$

**Beweis:** Einerseits

$$\langle e^{ik\omega t}, e^{ik\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-ik\omega t} e^{ik\omega t}\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T 1\, dt = 1,$$

andererseits

$$\langle e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\ell-k)\omega t}\, dt = \frac{1}{T} \frac{1}{i(\ell-k)\omega} e^{i(\ell-k)\omega t}\Big|_{t=0}^{t=T} = 0$$

für $k \neq \ell$. ∎

# Berechnung der Fourier-Koeffizienten.

**Satz:** *Konvergiert die Fourier-Reihe*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

*auf* $[0, T]$ *gleichmäßig gegen eine Funktion* $f$*, so ist* $f$ *stetig und es gilt:*

$$\gamma_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}\,dt \qquad \textit{für } k \in \mathbb{Z}.$$

**Beweis:** Da $f_n$ stetig und gleichmäßig gegen $f$ konvergieren, ist $f$ stetig. Weiterhin:

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)e^{-i\ell\omega t}\,dt &= \int_0^T \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k e^{ik\omega t} e^{-i\ell\omega t}\,dt \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k \int_0^T e^{ik\omega t} e^{-i\ell\omega t}\,dt = \gamma_\ell \cdot T. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

# Orthonormalität und Fourier-Koeffizienten in $\mathbb{R}$.

$$\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \quad k \neq \ell \\ T/2 & : \quad k = \ell \neq 0 \\ T & : \quad k = \ell = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(\ell\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \quad k \neq \ell \\ T/2 & : \quad k = \ell \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \text{für } k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt \quad \text{für } k > 0$$

## 11.2 Fourier-Reihen

**Definition:**

- *Eine Funktion* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *heißt* `stückweise stetig` *bzw.* `stückweise stetig differenzierbar`, *falls* $f(t)$ *bis auf endlich viele Stellen auf* $[a, b]$ *stetig bzw. stetig differenzierbar ist und in diesen Ausnahmepunkten die einseitigen Grenzwerte von* $f(t)$ *bzw.* $f'(t)$ *existieren.*

- *Für eine stückweise stetige Funktion* $f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{C}$ *werden die* `Fourier-Koeffizienten` *von* $f(t)$ *definiert durch*

$$\gamma_k := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t}\, dt \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

*Dabei ist* $\omega = 2\pi/T$ *die* `Kreisfrequenz`. □

**Bemerkung:** Mit den (komplexen) Fourier-Koeffizienten $\gamma_k$ bekommt man die (reellen) Fourier-Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
a_k &:= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt && \text{für } k \geq 0 \\
b_k &:= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt && \text{für } k > 0
\end{aligned}
$$

**Definition:** *Die mit den Fourier-Koeffizienten gebildete Reihe*

$$
F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]
$$

*heißt die* `Fourier-Reihe` *von* $f(t)$. □

**Bemerkung:** Bei der obigen Definition verwendet man auch die **direkte Fortsetzung** der Funktion $f : [0, T] \to \mathbb{C}$ zu einer $T$-periodischen Funktion.

**Satz:** *Sei* $f(t)$ *eine stückweise stetige,* $T$*-periodische Funktion. Dann gilt:*

$$f(t) \textit{ gerade} \quad \Longrightarrow \quad a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \textit{und} \quad b_k = 0$$

$$f(t) \textit{ ungerade} \quad \Longrightarrow \quad a_k = 0 \quad \textit{und} \quad b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt.$$

**Beweis:** Beispielsweise gilt für $f$ gerade (argumentiere für $f$ ungerade analog):

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T}\int_0^{T} f(t)\sin(k\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{-T} f(-\tau)\sin(k\omega\tau)\,d\tau \\ &= -\frac{2}{T}\int_{-T}^{0} f(\tau)\sin(k\omega\tau)\,d\tau = -\frac{2}{T}\int_0^{T} f(\tau)\sin(k\omega\tau)\,d\tau = -b_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos(k\omega t)\,dt + \int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} f(-\tau)\cos(k\omega\tau)\,dt + \int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt\right] = \frac{4}{T}\left[\int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt\right]. \end{aligned}$$

## Beispiel: Die Sägezahnfunktion.

Betrachte die Sägezahnfunktion

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \quad \text{für } t = 0 \text{ oder } t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \quad \text{für } 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Sägezahnfunktion ist ungerade, also gilt (mit $\omega = 1$)

$$a_k = 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2} \sin(kt)\, dt = \frac{1}{k}$$

und damit bekommt man die Fourier-Reihe

$$S(t) = \sin(t) + \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \ldots$$

Approximation der Sägezahnfunktion durch 10. Partialsumme

$$S_{10}(t) = \sum_{k=1}^{10} \frac{\sin(kt)}{k}.$$

## Beispiel: Die Rechteckschwingung.

Betrachte die Rechteckschwingung

$$R(t) := \begin{cases} 0 & : \quad \text{für } t = 0, t = \pi \text{ oder } t = 2\pi \\ 1 & : \quad \text{für } 0 < t < \pi \\ -1 & : \quad \text{für } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Funktion ist ungerade, also gilt:

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \\ b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(kt)\, dt = \begin{cases} 0 & : \quad \text{für } k \text{ gerade;} \\ \frac{4}{k\pi} & : \quad \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe von $R(t)$ lautet daher

$$R(t) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \ldots \right).$$

# Noch ein Beispiel.

Betrachte $f(t) = t^2$, $-\pi < t < \pi$ mit direkter $2\pi$-periodischer Fortsetzung.

Die Fortsetzung ist gerade, damit folgt

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t^2 \cos(kt)\,dt = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3} & : \quad \text{für } k = 0 \\ (-1)^k \frac{4}{k^2} & : \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Damit bekommt man die Fourier-Reihe

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{4\cos(t)}{1^2} + \frac{4\cos(2t)}{2^2} \mp \ldots$$

$\square$