## 9.3 Der Hauptsatz und Anwendungen

**Definition:** *Seien Funktionen* $F, f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *Funktionen mit* $F'(x) = f(x)$, $a \le x \le b$. *Dann heißt* $F(x)$ `Stammfunktion` *von* $f(x)$.

**Bemerkung:**

- Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so sind alle Funktionen der Form

$$\tilde{F}(x) = F(x) + c$$

  mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f(x)$.

- Sind $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$, so ist die Funktion

$$F_1(x) - F_2(x)$$

  konstant.

$\square$





# Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

**Satz:** *Sei* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann gilt:*

*(a) Die Funktion*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

*ist eine Stammfunktion von* $f(x)$.

*(b) Ist* $F(x)$ *eine Stammfunktion von* $f(x)$, *so gilt*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

**Beweis von (a):** Wir zeigen, dass $F'(x) = f(x)$ gilt.

Sei $h \neq 0$ so, dass $x, x+h \in [a,b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| \\
&\quad = \left| \frac{1}{h}\left( \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right) - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt \right| \\
&\quad = \left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt \right| \\
&\quad \leq \sup\{\, |f(t) - f(x)| : |t-x| \leq h \text{ und } t \in [a,b] \} \\
&\quad \to 0 \qquad \text{für } h \to 0,
\end{aligned}$$

mit der (gleichmäßigen) Stetigkeit von $f$ auf $[a,b]$. ■





**Beweis von (b):** Mit Teil (a) gilt

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

für eine Konstante $C$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
F(b) &= \int_a^b f(t)\,dt + C \\
F(a) &= \int_a^a f(t)\,dt + C = 0 + C = C
\end{aligned}$$

und somit

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

■

## Bemerkungen.

- Teil (a) des Hauptsatzes gilt auch für *stückweise stetige* Funktionen $f(x)$. An den Unstetigkeitsstellen ist die Stammfunktion allerdings nur **einseitig differenzierbar** mit

$$F'(x^-) = \lim_{x \to x^-} f(x) \quad \text{und} \quad F'(x^+) = \lim_{x \to x^+} f(x).$$

- Eine Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ nennt man `das unbestimmte Integral` von $f(x)$ und man schreibt

$$F = \int f(x)\, dx$$

Die Funktion $F$ ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

$\square$





**Beispiele.** Wir bezeichnen mit $C$ stets die `Integrationskonstante`.

$$\begin{aligned}
\int x^n\, dx &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad \text{für } n \neq -1 \\
\int \frac{1}{x}\, dx &= \log|x| + C \qquad \text{für } x \neq 0 \\
\int \sin(x)\, dx &= -\cos(x) + C \\
\int \cos(x)\, dx &= \sin(x) + C \\
\int \tan(x)\, dx &= -\log|\cos(x)| + C \qquad \text{für } \cos(x) \neq 0 \\
\int \cot(x)\, dx &= \log|\sin(x)| + C \qquad \text{für } \sin(x) \neq 0 \\
\int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx &= \tan(x) + C \qquad \text{für } x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

## Weitere Beispiele.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx &= -\cot(x) + C && \text{für } x \neq k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin(x) + C && \text{für } |x| < 1 \\
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C && \text{für } |x| > 1 \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x + C \\
\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C && \text{für } |x| \neq 1. \\
\int e^{ax}\,dx &= \frac{1}{a}e^{ax} + C && \text{für } a \neq 0.
\end{aligned}
$$





## Noch mehr Beispiele.

$$
\begin{aligned}
\int b^x\,dx &= \frac{1}{\log(b)}b^x + C && \text{für } b > 0, b \neq 1. \\
\int \log(x)\,dx &= x(\log(x) - 1) + C && \text{für } x > 0. \\
\int \log_b(x)\,dx &= \frac{x}{\log(b)}(\log(x) - 1) + C && \text{für } b > 0, x > 0. \\
\int \sinh(x)\,dx &= \cosh(x) + C \\
\int \cosh(x)\,dx &= \sinh(x) + C \\
\int \tanh(x)\,dx &= \log(\cosh(x)) + C \\
\int \coth(x)\,dx &= \log(|\sinh(x)|) + C && \text{für } x \neq 0.
\end{aligned}
$$

## Wichtige Integrationsregeln.

**Satz** (Linearität): *Sind* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stückweise stetig, so gilt*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

*für alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. ■

**Satz** (Partielle Integration): *Sind* $u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx$$

*für unbestimmte Integrale, womit für bestimmte Integrale folgt*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\, dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\, dx.$$

**Beweis:** folgt direkt aus Produktregel der Differentiation: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. ■





## Die Substitutionsregel.

**Satz:** *Ist* $h : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ *stetig differenzierbar und* $f : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig mit Stammfunktion* $F(x)$, *so gilt*

$$\int f(h(t))h'(t)\, dt = F(h(t)).$$

*Für bestimmte Integrale erhält man somit*

$$\int_a^b f(h(t))h'(t)\, dt = F(h(b)) - F(h(a)) = \int_{h(a)}^{h(b)} f(x)\, dx.$$

**Beweis:** folgt direkt aus Kettenregel der Differentiation:

$$\frac{d}{dt}(F(h(t))) = f(h(t)) \cdot h'(t).$$

■

## Beispiele.

- Linearität:

$$\int (28x^3 + 12x^2 - 2x + 3)\,dx = 7x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + C$$

- Partielle Integration:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + C$$

- Partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int \log(x)\,dx &= \int 1 \cdot \log(x)\,dx \\ &= x \cdot \log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= x(\log(x) - 1) + C \end{aligned}$$

□





## Ein weiteres Beispiel zur partiellen Integration.

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x)\,dx &= \int \sin(x) \cdot \sin(x)\,dx \\ &= \sin(x)(-\cos(x)) + \int \cos^2(x)\,dx \\ &= -\sin(x)\cos(x) + \int (1 - \sin^2(x))\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\quad 2\int \sin^2(x)\,dx &= -\sin(x)\cos(x) + x + C \\ \Longrightarrow\quad \int \sin^2(x)\,dx &= \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C \end{aligned}$$

□

## Ein Beispiel zur Substitutionsregel.

Substituiere $x = h(t) = a\cos(t)$ in

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1-(x/a)^2}\,dx = \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2(t)}(-a\sin(t))\,dt,$$

denn

$$dx = -a\sin(t)\,dt \qquad h(0) = a \quad \text{und} \quad h(\pi) = -a.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \sqrt{1-(x/a)^2}\,dx &= \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2(t)}\,(-a\sin(t))\,dt \\
&= a\int_{0}^{\pi} \sin^2(t)\,dt \\
&= \frac{a}{2}(t-\sin(t)\cos(t))\Big|_{0}^{\pi} = \frac{a\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$\square$





## Ein weiteres Beispiel zur Substitutionsregel.

Substituiere $x = h(t) = t^2$, d.h. $t = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$ in

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^t\,2t\,dt$$

denn es gilt

$$h'(t) = 2t.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\int e^{\sqrt{x}}\,dx &= \int e^t\,2t\,dt \\
&= 2(t-1)e^t + C \\
&= 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C.
\end{aligned}$$

$\square$

## Bemerkung.

- Nicht jedes Integral lässt sich explizit “lösen”, d.h.
- nicht jede (integrierbare) Funktion besitzt “einfache” Stammfunktion bzw.
- manche Stammfunktionen lassen sich nicht durch Komposition von elementaren Funktionen darstellen.

**Beispiele:**

$$\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt \qquad (\texttt{Integralsinus})$$

$$\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad (\texttt{Fehlerfunktion})$$

$$E(x,k) := \int_0^x (1 - k^2 \sin^2 t)^{\pm\frac{1}{2}}\,dt \qquad (\texttt{Elliptische Integrale})$$

$\square$