

Die Bogenlängenfunktion einer C^1 -Kurve.

Definition: Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Kurve.

- Die Funktion

$$S(t) := \int_a^t \|\dot{c}(\tau)\| \, d\tau$$

heißt die **Bogenlängenfunktion** von c .

- Ist c glatt, so ist $S : [a, b] \rightarrow [0, L(c)]$ ein C^1 -Parameterwechsel.
- Die Umkehrabbildung $t = S^{-1}(s)$, $0 \leq s \leq L(c)$, ist dann ebenfalls ein C^1 -Parameterwechsel.
- Die Parametrisierung

$$\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s)) \quad \text{für } 0 \leq s \leq L(c)$$

von c nennt man die **Parametrisierung nach der Bogenlänge**. \square

Eigenschaften der Bogenlängenparametrisierung.

Bemerkung: Für die Bogenlängenparametrisierung $\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s))$ gilt:

- Die Ableitung von $\tilde{c}(s)$ ist gegeben durch

$$\tilde{c}'(s) = \dot{c}(S^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\|\dot{c}(S^{-1}(s))\|}$$

Daher ist $\tilde{c}'(s)$ ein **Einheitsvektor**, d.h. mit dieser Parametrisierung wird die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen.

Weiterhin ist $\tilde{c}'(s)$ der **Einheitstangentenvektor** von c .

- Aus $\langle \tilde{c}'(s), \tilde{c}'(s) \rangle = 1$ folgt durch Differentiation

$$\langle \tilde{c}''(s), \tilde{c}'(s) \rangle = 0$$

d.h. der **Beschleunigungsvektor** $\tilde{c}''(s)$ bezüglich der Bogenlänge steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\tilde{c}'(s)$. \square

Hauptnormale und Krümmung.

Definition: Sei $\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s))$ die Bogenlängenparametrisierung der Kurve c .

- Dann bezeichnet man den Vektor

$$\mathbf{n}(s) := \frac{\tilde{c}''(s)}{\|\tilde{c}''(s)\|}$$

als den **Hauptnormalenvektor** von c .

- Die Funktion

$$\kappa(s) := \|\tilde{c}''(s)\| \quad \text{für } 0 \leq s \leq L(c)$$

nennt man die **Krümmung** von c . □

Beispiel: Mit der Parametrisierung des Einheitskreises nach der Bogenlänge:

$$\tilde{c}(s) = (\cos(s), \sin(s)) \quad \text{für } 0 \leq s \leq 2\pi$$

$$\mathbf{n}(s) = \tilde{c}''(s) = -(\cos(s), \sin(s))$$

$$\kappa(s) \equiv 1$$

Parametrisierungen von Funktionsgraphen.

Betrachte Graph von $y = y(x)$ als Kurve im \mathbb{R}^2 , d.h. $c(x) = (x, y(x))^T$. Dann:

$$c'(x) = (1, y'(x))^T \quad ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad \kappa(x) = \frac{|y''(x)|}{(\sqrt{1 + (y'(x))^2})^3}$$

Betrachte analog für $y(x)$ und $z(x)$ die Kurve $c(x) = (x, y(x), z(x))^T \in \mathbb{R}^3$:

$$c'(x) = (1, y'(x), z'(x))^T$$

$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2} dx \quad (\text{Bogenlängenelement})$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2} dx$$

$$\kappa(x) = \frac{\sqrt{(1 + (y')^2 + (z')^2)((y'')^2 + (z'')^2) - (y'y'' + z'z'')^2}}{\sqrt{(1 + (y')^2 + (z')^2)^3}}$$

Polarkoordinaten und Kugelkoordinaten.

- Für die **Polarkoordinaten** $r \equiv r(t)$, $\varphi \equiv \varphi(t)$ im \mathbb{R}^2 gilt:

$$c(t) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))^T \quad \text{für } a \leq t \leq b$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} dt.$$

- Für die **Kugelkoordinaten** $r \equiv r(t)$, $\varphi \equiv \varphi(t)$, $\psi \equiv \psi(t)$ im \mathbb{R}^3 gilt:

$$c(t) = (r \cos(\varphi) \cos(\psi), r \sin(\varphi) \cos(\psi), r \sin(\psi))^T \quad \text{für } a \leq t \leq b$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2(\psi) + r^2 \dot{\psi}^2} dt.$$

□

Beispiel: Kardioiden in Polarkoordinaten.

Betrachte die **Kardioiden** (Herzlinie) in Polarkoordinaten:

$$r = a(1 + \cos(\varphi)) \quad \text{für } a > 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Für den Umfang (d.h. Bogenlänge) der Kardioiden gilt:

$$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(\varphi) + a^2(1 + \cos(\varphi))^2} d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = 8a$$

□

Die von einer Kurve umschlossene Fläche.

Satz: Für die von einer C^1 -Kurve $c(t) = (x(t), y(t))^T \in \mathbb{R}^2$ überstrichene Fläche gilt:

$$F(c) = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt$$

Beweisskizze: Summiere für eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ über die Flächen

$$|F_i| = \frac{1}{2} \|c(t_i) \times c(t_{i+1})\| = \frac{1}{2} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \quad \text{für } 0 \leq i \leq m-1.$$

$$\begin{aligned} \curvearrowright F(Z) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i}{t_{i+1} - t_i} \Delta t_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(x_i \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} y_i \right) \Delta t_i \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) dt. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel: Die Archimedische Spirale.

Die **Archimedische Spirale** ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$x = a \varphi \cos(\varphi), \quad y = a \varphi \sin(\varphi), \quad \text{für } a > 0, \varphi \in \mathbb{R}$$

Berechnung des Umfangs (Bogenlänge) und der Fläche der innersten Schleife:

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 + a^2 \varphi^2} d\varphi \\ &= \frac{a}{2} \left[\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \log \left(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2} \right) \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \approx 4.158a \end{aligned}$$

und mit

$$x\dot{y} - \dot{x}y = r^2 \dot{\varphi}$$

gilt

$$F = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi^2 d\varphi \approx 1.292a^2.$$

□

10.3 Kurvenintegrale

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, eine stetige Funktion und $c : [a, b] \rightarrow D$ eine stückweise C^1 -Kurve. Dann wird das **Kurvenintegral (Linienintegral)** von $f(x)$ längs c definiert durch

$$\int_c f(x) \, ds := \int_a^b f(c(t)) \|\dot{c}(t)\| \, dt.$$

Notation: Für eine **geschlossene** Kurve c schreibt man auch

$$\oint_c f(s) \, ds.$$

Parametrisierungsinvarianz von Kurvenintegralen.

Satz: Das Kurvenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve.

Beweis: Für einen Parameterwechsel $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ einer Kurve c gilt

$$\begin{aligned} \int_{c \circ h} f(x) \, ds &= \int_{\alpha}^{\beta} f(c(h(\tau))) \left\| \frac{d}{d\tau} c(h(\tau)) \right\| \, d\tau \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(c(h(\tau))) \|\dot{c}(h(\tau))\| h'(\tau) \, d\tau \\ &= \int_a^b f(c(t)) \|\dot{c}(t)\| \, dt \\ &= \int_c f(x) \, ds \end{aligned}$$



Beispiel. Betrachte einen krummlinigen mit Masse belegten Draht, beschrieben durch eine C^1 -Kurve c und mit der (inhomogenen) Massendichte ρ .

- Für die **Gesamtmasse** des Drahtes bekommt man

$$\int_c \rho(x) \, ds := \int_a^b \rho(c(t)) \|\dot{c}(t)\| \, dt.$$

- Der **Schwerpunkt** des Drahtes liegt bei

$$x_S = \frac{\int_c \rho(x) x \, ds}{\int_c \rho(x) \, ds}$$

- Das **Trägheitsmoment** des Drahtes ist gegeben durch

$$\theta = \int_c \rho(x) r^2(x) \, ds$$

wobei $r(x)$ der Abstand von der Drehachse ist. □