Aufgabe 1) [7+ 3]

a) Berechnen Sie
$$\int \frac{2e^t - 4}{e^{2t} + 1}\,dt$$
mit Hilfe der Substitution $x := e^t$.

b) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion
$$f(x) := \frac{3}{7-9x}$$
zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und geben Sie das Konvergenzintervall der Potenzreihe an.

Hinweis: Geometrische Reihe.

Lösung der Aufgabe 1) [7+ 3 Punkte]

a) Mit der Substitution
$$x := e^t, \quad \tfrac{dx}{dt} = e^t = x, \quad dt = dx/x, \qquad \textbf{[1 punkt]}$$
erhält man
$$\int \frac{2e^t - 4}{e^{2t} + 1}\,dt = \int \frac{2x-4}{(x^2+1)x}\,dx \qquad \textbf{[1 punkt]}$$

Partialbruchzerlegung:
$$\frac{2x-4}{(x^2+1)(x)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{a(1+x^2)+bx^2+cx}{x(1+x^2)} \qquad \textbf{[1 punkt]}$$

Die Koeffizienten a, b, c errechnen sich aus der Bedingung
$$(a+b)x^2 + cx + a = 2x - 4\,.$$

Koeffizientenvergleich liefert:
$$a = -4,\ c = 2,\ a+b = 0 \Longrightarrow b = 4\,, \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

und somit
$$\begin{aligned}\int \frac{2e^t - 4}{e^{2t} + 1}\,dt &= \int \frac{2x-4}{(x^2+1)x}\,dx \\ &= \int \frac{-4}{x} + \frac{4x+2}{1+x^2}\,dx = -4\ln|x| + \int \frac{4x}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2}\,dx \\ &= -4\ln|x| + +2\ln(1+x^2) + 2\arctan(x) + c\,. \qquad \textbf{[3 Punkte]}\end{aligned}$$

b)

$$\frac{3}{7-9x} = \frac{3}{7(1-\frac{9}{7}\,x)} = \frac{3}{7}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{9}{7}\right)^k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3\cdot 9^k}{7^{k+1}}\,x^k \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Die geometrische Reihe in der ersten Zeile der Formel konvergiert genau dann, wenn

$$\left|\frac{9x}{7}\right| < 1 \iff |x| < \frac{7}{9} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

gilt.

Aufgabe 2) (4 + 6 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe Gegeben seien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3^{k+1}}{k}\right) (x-4)^k$$

und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls.

b) Gegeben sei die Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 2-t, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Berechnen Sie die reellen Fourier–Koeffizienten der ungeraden, 4 –periodischen Fortsetzung von f.

Lösung der Aufgabe 2)

a) Mit $a_k = \dfrac{3^{k+1}}{k}$ liefert das Quotientenkriterium den Konvergenzradius

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^{k+1}}{k} \cdot \frac{k+1}{3^{k+2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{3k}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \lim_{k\to\infty} (1 + \frac{1}{k}) = \frac{1}{3}. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Für $x_0 + r = 4 + \frac{1}{3}$ erhält man mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3^{k+1}}{k}\right) (4 + \frac{1}{3} - 4)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3^{k+1}}{k}\right) \frac{1}{3^k} = 3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

das dreifache der divergenten harmonischen Reihe, also Divergenz. **[1 Punkt]**

Für $x_0 + r = 4 - \frac{1}{3}$ erhält man mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3^{k+1}}{k}\right) (4 - \frac{1}{3} - 4)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3^{k+1}}{k}\right) \frac{(-1)^k}{3^k} = 3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

das dreifache der konvergenten alternierenden harmonischen Reihe, also Konvergenz. **[1 Punkt]**

b) Da eine ungerade Funktion betrachtet wird, gilt mit $T = 4$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$a_k = 0 \qquad \forall \quad k \in \mathbb{N} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(k\omega t)\,dt = \int_0^2 f(t)\cdot\sin\left(k\frac{2\pi}{4}t\right)dt$$

$$= \int_0^1 t\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)dt + \int_1^2 (2-t)\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)dt \qquad \textbf{[1 Punkt)}$$

$$= \left[t\cdot\left(-\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}\,dt$$

$$+ \left[(2-t)\cdot\left(-\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}\,dt \qquad \textbf{[1 Punkt)}$$

$$= \frac{-2}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{2}{k\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}\right]_0^1 + \frac{2}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{2}{k\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}\right]_1^2$$

$$= \frac{4}{k^2\pi^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{4}{k^2\pi^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \frac{8}{k^2\pi^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right). \qquad \textbf{[3 Punkte]}$$

Wir erhalten also die Fourier-Reihe: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{k^2\pi^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right).$

Hinweis: Alle Integrale sind elementar zu berechnen. Stammfunktionen aus Formelsammlungen etc. dürfen nicht verwendet werden.

Viel Erfolg!