Buch Kap. 5.3 – Kurven im $\mathbb{R}^n$

Defintion 5.14: (Bogenlänge)
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve.

$$s(t) := \int_{t_a}^{t} \|\dot\gamma(t)\| \, dt$$

bezeichnen wir als Bogenlänge des Kurvenstücks über $[t_a, t]$.

Buch Kap. 7.4 – Skalare Kurvenintegrale

Defintion 7.7: (Skalares Kurvenintegral einer Funktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}$ sei auf allen Punkten einer Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt

$$\int_\gamma f\, ds := \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t))\|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

skalares Kurvenintegral der Funktion f (bzw. Kurvenintegral erster Art).

Buch Kap. 7.4 – Skalare Kurvenintegrale

Schritte zur Berechnung des skalaren Kurvenintegrals einer Funktion

1) **Falls nicht gegeben, Parametrisierung der Kurve** $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$
2) **Berechnung der Funktionswerte** $f(\gamma(t))$ **der Belegungsfunktion**
3) **Berechnung von** $\|\dot{\gamma}(t)\|$
4) **Berechnung des Kurvenintegrals**

$$\int_\gamma f\, ds = \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t))\|\dot{\gamma}(t)\|\, dt.$$

Buch Kap. 7.4 – Skalare Kurvenintegrale

Satz 7.1:(Rechenregeln für Kurvenintegrale und Mittelwertsatz)

Sei γ eine Kurve und $f, g : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Regeln

(i) $\int_\gamma (f+g)ds = \int_\gamma f\,ds + \int_\gamma g\,ds$ **(Additivität des Integrals)**

(ii) $\int_\gamma \alpha f\,ds = \alpha \int_\gamma f\,ds$ **(Homogenität des Integrals)**

(iii) $\int_\gamma f\,ds = f(\gamma(\tau)) \cdot L$ **(Mittelwertsatz)**

Dabei ist L die Länge der Kurve und $\gamma(\tau)$ ein geeigneter Kurvenpunkt.

Buch Kap. 2.17 – Numerische Integration, Ansätze

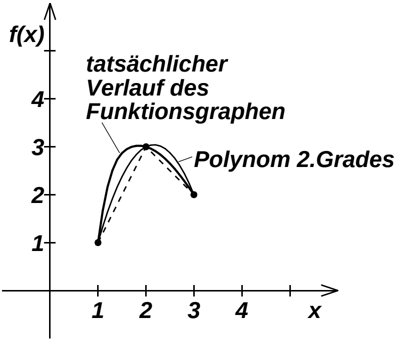

Abb. 2.68: Interpolationsordnung und Quadratur

Buch Kap. 2.17 – Numerische Integration, Fehler

Satz 2.46: (Quadraturfehler) $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$ **mit** $x_j = a + jh$ **und** $h := \frac{b-a}{n+1}$ **unterteile** $[a, b]$**. Dann gelten die Fehlerdarstellungen**

Ist f in $[a, b]$ stetig differenzierbar, so gilt mit einem $\xi \in (a, b)$

$$h \sum_{k=0}^{n} f(x_{k+1}) - \int_a^b f(x)dx = f'(\xi) \frac{(b-a)h}{2} \quad \text{(Summierte Rechteck Regel).}$$

Ist f in $[a, b]$ 2mal stetig differenzierbar, so gilt mit einem $\xi \in (a, b)$

$$h \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} - \int_a^b f(x)dx = f^{(2)}(\xi) \frac{(b-a)h^2}{12} \quad \text{(Summierte Trapez Regel).}$$

Ist f in $[a, b]$ 4mal stetig differenzierbar, so gilt mit einem $\xi \in (a, b)$

$$h \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k) + 4f(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}) + f(x_{k+1})}{6} - \int_a^b f(x)dx = f^{(4)}(\xi) \frac{(b-a)h^4}{180}$$

(Summierte Simpson Regel, auch Keplersche Faßregel genannt).