Analyis II
TUHH
VL 13, 14. und 15. Juli 2016

Fourierreihen

Michael Hinze

Zur Bessel-Ungleichung

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{m}(a_k^2+b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \qquad \text{falls } f^2 \text{ R-integrierbar}$$

Nachweis: betrachte $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x)-\big(\underbrace{\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m} a_k\cos kx+b_k\sin kx}_{S_m(f;x)}\big)\Big]^2 dx \ge 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi}[\quad]^2 dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(f^2(x) - 2f(x)(\ldots\ldots)+(\ldots\ldots)^2\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{m}(a_k^2+b_k^2)\le \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx}_{\text{unabh. von } m\ !}$$

Also auch

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

Es gilt: f^2 integrierbar. Dann

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \qquad \text{Parseval Gleichung}$$

Dies folgt aus der Vollständigkeit des Modensystems $\{1, \cos x, \sin x, \dots\}$ in dem Raum $(L^2(-\pi,\pi), \langle\cdot,\cdot\rangle)$

Bestapproximation der $S_m(f,\cdot)$ im quadratischen Mittel

Es gilt: Sei f^2 integrierbar. Dann gilt

$$\|f-S_m\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x) - \Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos kx + b_k \sin kx\Big)\Big]^2 dx$$

$$\le \int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x) - \Big(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} A_k \cos kx + B_k \sin kx\Big)\Big]^2 dx \qquad \forall_{\substack{A_0, A_1, \dots \\ B_1, B_2, \dots}} \in \mathbb{R}$$

<u>Nachweis:</u> Betrachte

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Big[f(x) - \Big(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} A_k \cos kx + B_k \sin kx\Big)\Big]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) - 2f(x)(\dots) + (\dots)^2\, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) A_0\,dx - 2\pi \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} A_k f(x)\cos kx\,dx}^{A_k a_k} - 2\pi \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} B_k f(x) \sin kx\,dx}^{B_k b_k}$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A_0^2}{4}\,dx + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \int_{-\pi}^{\pi} A_0(A_k \cos kx + B_k \sin kx)}_{=0} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum A_k \cos kx + B_k \sin kx\Big)^2 dx}_{\pi \sum_{k=1}^{m}(A_k^2 + B_k^2)}$$

Orthog. von $\sin kx$, $\cos kx$ mit 1-Funktion

quadr. Ergänzung

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m}(A_k - a_k)^2 + \frac{1}{2}(A_0 - a_0)^2 - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^{m} a_k^2$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}(B_k - b_k)^2 - \sum_{k=1}^{m} b_k^2$$

Dieser Ausdruck wird minimal für $A_0 = a_0$, $A_k = a_k$ $(k \in \mathbb{N})$ und $B_k = b_k$ $(k \in \mathbb{N})$

Einige Konvergenzaussagen: f 2π-periodisch

i.) f stetig und stückweise glatt. Dann konvergiert $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig! Dies folgt aus

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y+x)\, D_n(y)\, dy \quad \text{mit} \quad D_n(y) := \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\sin\frac{y}{2}}}_{\text{Dirichlet-Kern}}$$

ii) Es gibt eine stetige Funktion f, deren Fourierreihe nicht überall gegen f konvergiert (Du Bois-Reymond)

iii) Ist f^2 integrierbar, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\|_2 = 0 \quad , \text{ d.h. } (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert im}$$

quadratischen Mittel

<u>Stichworte</u>: • Konvergenz gegen arithmetisches Mittel bei Sprüngen
• Gibbs-Phänomen: $(f(x) - S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ muß nicht überall punktweise konvergieren (bei Sprüngen!).

Jetzt zu Beispielen. Dazu bemerke

f gerade, d.h. $f(x) = f(-x)$: $b_k = 0 \quad \forall k$,

f ungerade, d.h. $f(x) = -f(-x)$: $a_k = 0 \quad \forall k$,

denn sei etwa f gerade. Dann auch $f(x)\cos kx$. Damit gilt

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin kx}_{f(x)\sin kx \text{ ungerade}}\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}\right)(f(x)\sin kx)\, dx$$

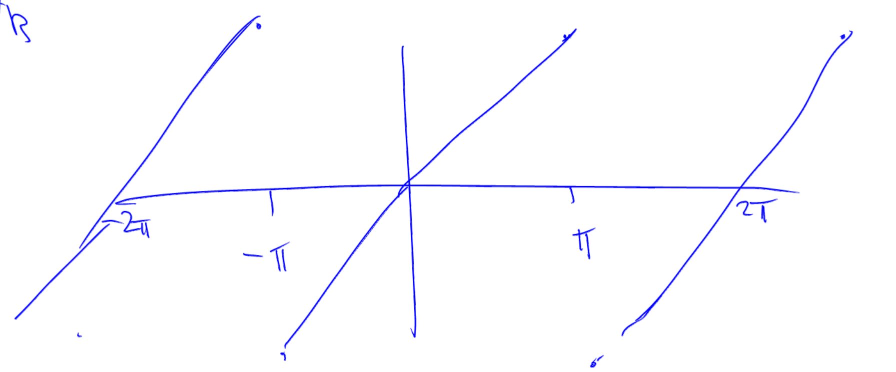
$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin kx\, dx \overset{!}{=} \int_{-\pi}^{0} -f(-x)\sin(-kx)\, dx \overset{f \text{ gerade},\ \sin \text{ ungerade}}{=} \int_{-\pi}^{0} f(x)\sin kx\, dx = -\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx$$

$\Rightarrow b_k = 0.$

Bsp
$$f(x) = \begin{cases} ax & -\pi < x < \pi \\ 0 & x = \pi \end{cases} \qquad f(x+2\pi) := f(x) \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}$$

$\Rightarrow f$ 2π-periodisch

f ungerade $\Longrightarrow a_k = 0 \ \forall_k$



und

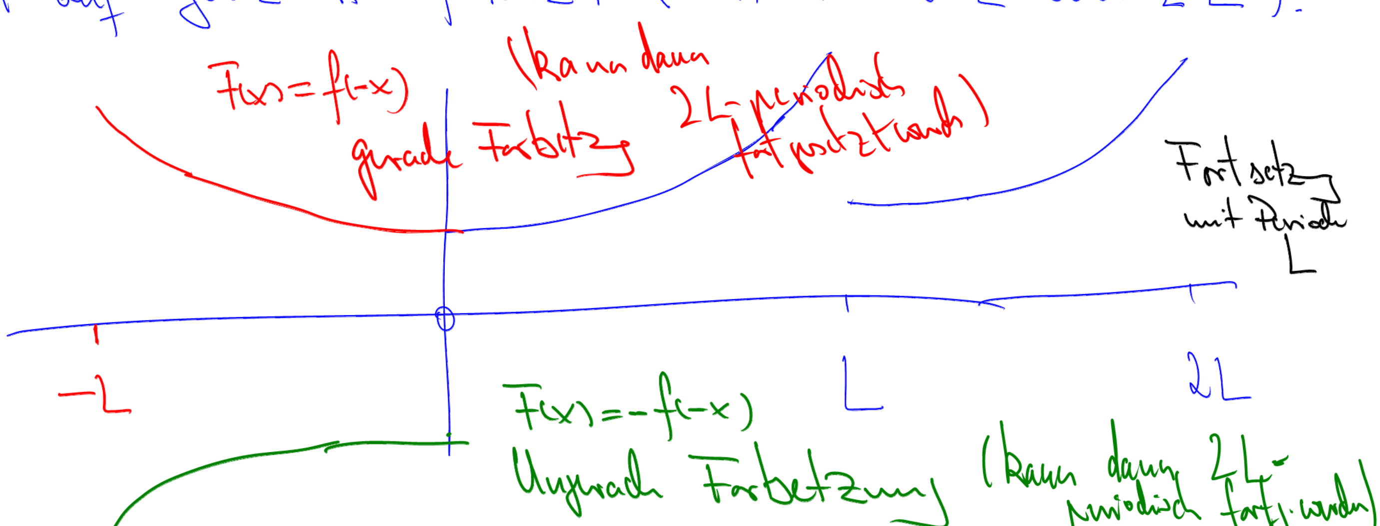
$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} ax\sin kx\, dx$$

part. Integr.

$$= \frac{2a}{k}(-1)^{k+1},$$

d.h. $S_\infty(f,x) = 2a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$

Ist f auf dem Intervall $[0,L]$ definiert, so kann ich sie periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen (mit Periode L oder $2L$).



Es gilt $a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos k\omega x\,dx$ L Periode von f

$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin k\omega x\,dx$ $\omega = \frac{2\pi}{L}$

wegen Substitutionsformel

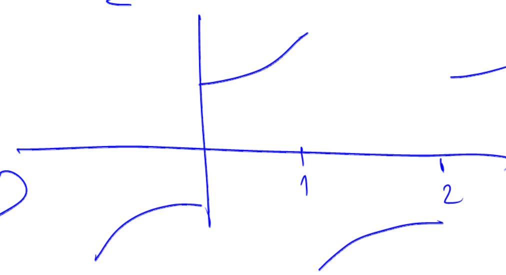
Bsp: $f(t)=e^t$ mit $L=1$ und $f(t+L)=f(t)$

$$S_\infty(f,x) = (e-1)\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{1+4\pi^2k^2}\cos 2\pi kx - \frac{4k\pi}{1+4\pi^2k^2}\sin 2\pi kx\right\}$$

Ungerade Fortsetzung mit Periode L=2

Damit

$$S_\infty(f,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{1+k^2\pi^2}\left\{1+e^{-2}-(-1)^k\left(e+\frac{1}{e}\right)\right\}\sin k\pi x$$



Nachtrag: Gerade Fortsetzung mit Periode L=2:

$$S_\infty(f,x) = \frac{\left(e+\frac{1}{e}\right)-\left(1+\frac{1}{e^2}\right)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-(1+e^{-2})+(-1)^k(e+e^{-1})}{1+k^2\pi^2}\cos k\pi t$$