

## Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

### **Satz 3.31: (punktweise und gleichmäßige Konvergenz)**

**Ist  $f$  eine stetige, stückweise glatte Funktion der Periode  $2\pi$ , so konvergiert ihre FOURIER-Reihe gleichmäßig und absolut gegen  $f$ . Für ihre FOURIER-Koeffizienten  $a_k, b_k$  folgt außerdem die Konvergenz der Reihen**

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| .$$

## Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

### Satz 3.33: (Approximation im quadratischen Mittel)

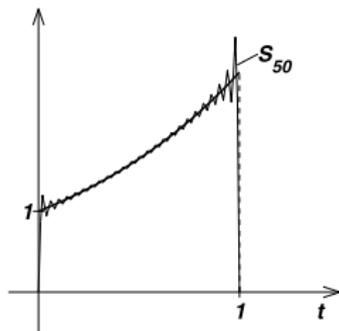
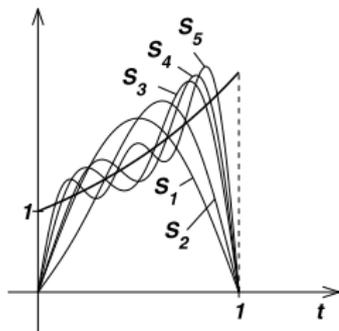
Sei  $m \in \mathbb{N}$  vorgegeben. Der quadratische Fehler der Approximation einer beschränkten,  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f$  durch ein trigonometrisches Polynom der Form  $s_m$  in der  $L_2$ -Norm, d.h.

$$\|f - s_m\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_m(x))^2 dx ,$$

wird genau dann minimal, wenn die Koeffizienten  $a_0$  und  $a_k, b_k, k = 1, 2, \dots$  gerade die FOURIER-Koeffizienten der Funktion  $f$  sind. Für den Fehler gilt

$$\|f - s_m\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k^2 + b_k^2) \right) .$$

## Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen



**Abbildung 3.28-3.29: Approximation von  $e^t$  auf  $[0,1]$  durch trigonometrische Polynome bis zum Grade 5 (links) und mit Grad 50 (rechts)**

## Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

**Satz 3.34: (gliedweise Integration einer FOURIER-Reihe)**  
**Eine punktweise konvergente FOURIER-Reihe kann man gliedweise integrieren und es gilt**

$$\int_0^x f(\xi) d\xi = \frac{a_0}{2} x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{a_k}{k} \sin(kx) - \frac{b_k}{k} \cos(kx) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} .$$

## Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

### **Satz 3.35: (gliedweise Differentiation einer FOURIER-Reihe)**

**Eine punktweise konvergente FOURIER-Reihe kann man im Allgemeinen nicht gliedweise differenzieren. Eine gliedweise Differentiation ist nur möglich, wenn die Ableitungsreihe konvergent ist.**