Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

Satz 3.31: (punktweise und gleichmäßige Konvergenz)
Ist f eine stetige, stückweise glatte Funktion der Periode 2π, so konvergiert ihre FOURIER-Reihe gleichmäßig und absolut gegen f. Für ihre FOURIER-Koeffizienten a_k, b_k folgt außerdem die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \;, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \;.$$

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

Satz 3.33: (Approximation im quadratischen Mittel)
Sei $m \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Der quadratische Fehler der Approximation einer beschränkten, 2π-periodischen Funktion f durch ein trigonometrisches Polynom der Form s_m in der L_2-Norm, d.h.

$$||f - s_m||_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_m(x))^2 \, dx \ ,$$

wird genau dann minimal, wenn die Koeffizienten a_0 und $a_k, b_k, \ k = 1,2,\ldots$ gerade die FOURIER-Koeffizienten der Funktion f sind. Für den Fehler gilt

$$||f - s_m||_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx - \pi\Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k^2 + b_k^2)\Big) \ .$$

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

Abbildung 3.28-3.29: Approximation von e^t auf [0,1] durch trigonometrische Polynome bis zum Grade 5 (links) und mit Grad 50 (rechts)

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

Satz 3.34: (gliedweise Integration einer FOURIER-Reihe)
Eine punktweise konvergente FOURIER-Reihe kann man gliedweise integrieren und es gilt

$$\int_0^x f(\xi)\,d\xi = \frac{a_0}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a_k}{k}\sin(kx) - \frac{b_k}{k}\cos(kx)\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}\ .$$

Buch Kap. 3.9 – FOURIER-Reihen

Satz 3.35: (gliedweise Differentiation einer FOURIER-Reihe)

Eine punktweise konvergente FOURIER-Reihe kann man im Allgemeinen nicht gliedweise differenzieren. Eine gliedweise Differentiation ist nur möglich, wenn die Ableitungsreihe konvergent ist.