

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

- a) Für folgende Potenzreihen bestimme man den Entwicklungspunkt und berechne den Konvergenzradius.

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+4} x^n, \quad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9n+2}{5n+1}\right)^n (x+3)^n.$$

- b) Man bestimme den Entwicklungspunkt, den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls (mit Begründung).

Aufgabe 22:

Gegeben sei die durch $f(x) = \frac{2}{3x+4}$ definierte Funktion.

- a) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe von f zum Entwicklungspunkt z_0 und bestimme deren Konvergenzradius für $z_0 = 1+i$.

- b) Man bestimme die Glieder der Potenzreihenentwicklung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ über das Cauchy-Produkt von Reihen und berechne den zugehörigen Konvergenzradius.

Aufgabe 23:

- a) Unter Verwendung der Potenzreihe von

$$f(x) = \frac{2}{3x + 4}$$

berechne man die Potenzreihe von

$$g(x) = \frac{1}{(3x + 4)^3}$$

zum Entwicklungspunkt x_0 und bestimme den zugehörigen Konvergenzradius.

- b) Man berechne die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = y$$

mit dem Anfangswert $y(0) = 3$ in folgender Potenzreihendarstellung

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Aufgabe 24:Gegeben sei die durch $f(x) = \ln(2 + x)$ definierte Funktion.

- a) Man berechne die Ableitung von f und damit die Potenzreihe von $\ln(2 + x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.
- b) Man untersuche das Konvergenzverhalten der unter a) bestimmten Potenzreihe in den Randpunkten und berechne im Falle der Konvergenz den Wert der entsprechenden Reihe.
- c) Man zeige, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$ gilt.
- d) Man berechne die Taylor-Reihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Dazu beweise man zunächst über Induktion

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2+x)^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Abgabetermin: 26.6. - 30.6.17 (zu Beginn der Übung)