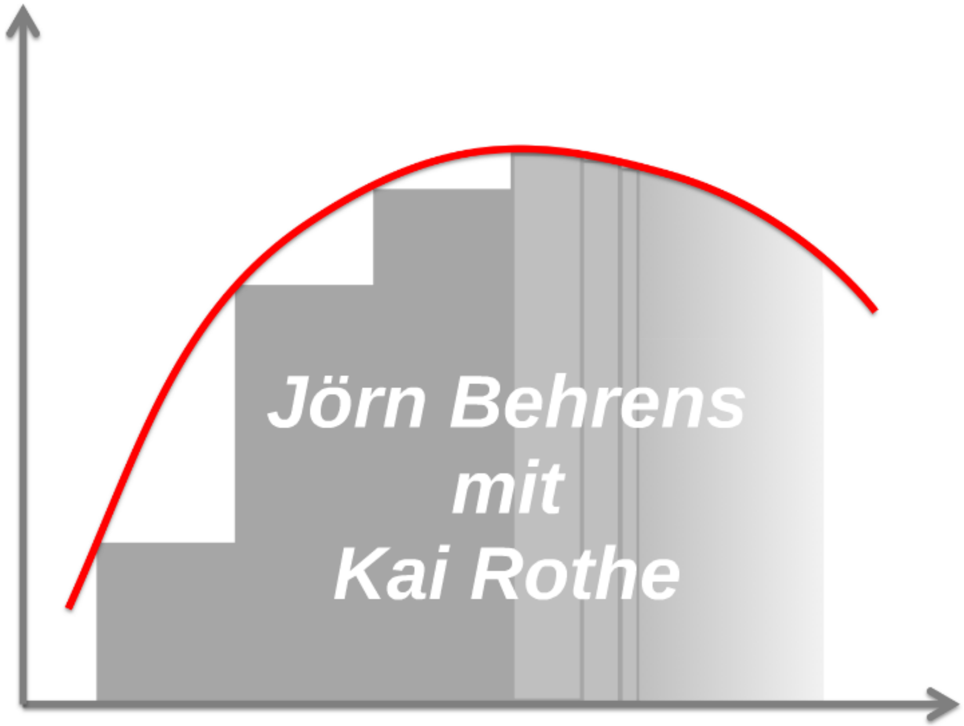
# Analysis II

Sommer 2017




*Jörn Behrens*
*mit*
*Kai Rothe*


Integration

Buch Kapitel 2.13

# Ihr Professor

## Koordinaten:

Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ CliSAP
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Sprechstunde in Harburg: Do 10:30-11:15
Gebäude E, Raum 3.079

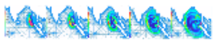
## Hintergrund

### Kurz-CV

seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

## Forschungsinteressen

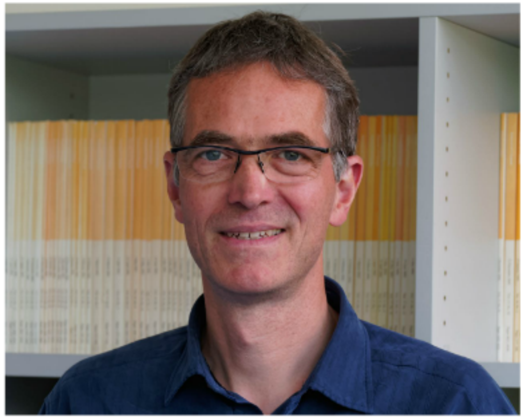
Adaptive Tsunami Modellierung



Adaptive Atmosphären Modellierung

Gitter Erzeugung
Multi-Skalen Simulationen

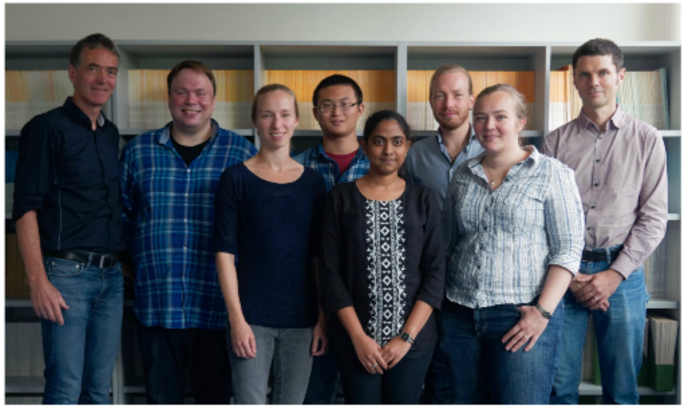
# *Koordinaten:*



Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ CliSAP
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Sprechstunde in Harburg: Do 10:30-11:15
Gebäude E, Raum 3.079

# *Hintergrund*

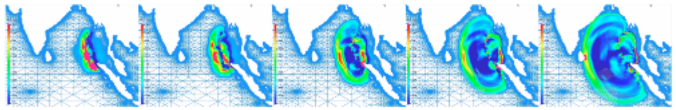


## Kurz-CV

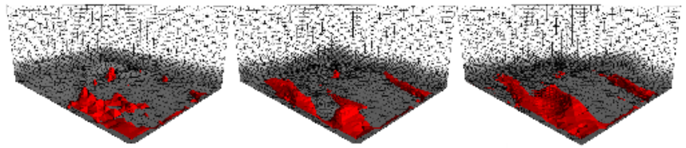
seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

# *Forschungsinteressen*

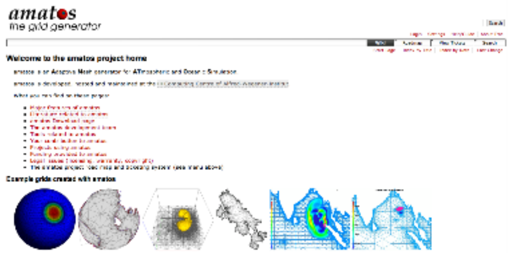
Adaptive Tsunami Modellierung



Adaptive Atmosphären Modellierung



Gitter Erzeugung




Multi-Skalen Simulationen

# *Infos zum Kurs*

## *Literatur*

Beispiele!

**G. Bärwolff**: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.
**R. Ansorge et al.**: *Mathematik für Ingenieure I* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2010.

### *Formelsammlung*

**K.Vetters**: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

## *Übungsleitung und Übungen*

Dr. Kai Rothe
https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/

Materialien:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/17/im.html

**Bitte gründlich vorbereiten!**

## *Räume*

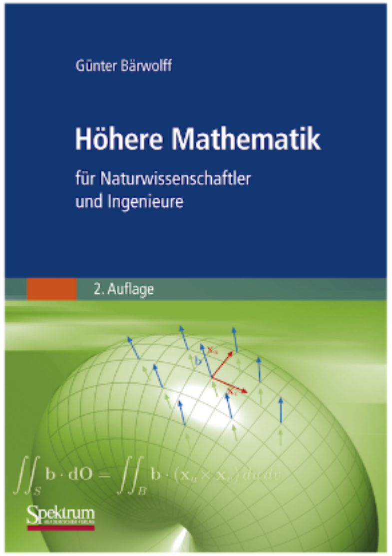
Donnerstags:
Audimax II

Freitags:
Audimax I

# Literatur

Beispiele!

**G. Bärwolff**: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.




**R. Ansorge et al.**: *Mathematik für Ingenieure I* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2010.

# Formelsammlung

**K.Vetters**: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

# *Übungsleitung und Übungen*

Dr. Kai Rothe

https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/

Materialien:

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/17/lm.html

**Bitte gründlich vorbereiten!**

# Räume

Donnerstags:
Audimax II

Freitags:
Audimax I

# Erinnerung: Kurven

## Definition

**Definition**: (Kurve im $E^2$)
Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung

$$\mathbf{x} : [a, b] \to G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $x_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Kurvenstück in $G$ mit

- Anfangspunkt $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a))^T$
- Endpunkt $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b))^T$,
- Spur $\{\mathbf{x}(t) : a \leq t \leq b\}$.

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem $\mathbb{R}^2$ werden Spaltenvektoren verwandt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^T.$$

Ein Kurvenstück heißt regulär, wenn für alle $t \in [a, b]$ gilt:

$$(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 > 0.$$

Eine Parameterdarstellung des Kurvenstücks mit dem Parameter $t$ ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Durch wachsende Werte des Parameters $t$ ist für das Kurvenstück eine Orientierung gegeben.
Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken $K_i$ ($i = 1 : r$), wobei der Anfangspunkt von $K_i$ dem Endpunkt von $K_{i-1}$ ($i = 2 : r$) entspricht, heißt Kurve.
Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es oft auch als Kurve bezeichnet.

## Tangente, Normale, Bogendifferential

**Definition**:

- $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^T$ heißt Tangentenvektor,
- $\mathbf{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))^T$ heißt Normalenvektor,

der Kurve $\mathbf{x}(t)$ im Punkt $(x(t), y(t))^T$.

**Bogenlänge**: (Bogendifferential)

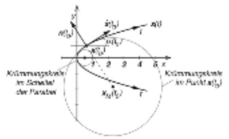
$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt.$$

heißt Differential der Bogenlänge (oder Bogenelement), wobei $dt$ das Differential der unabhängigen Variablen $t$ ist.

## Krümmungskreis

**Bemerkung** (Krümmungskreis):
Der Krümmungskreis einer Kurve im Punkt $P_0$ ist der Kreis,

- der durch $P_0$ geht,
- dessen Radius gleich dem Krümmungsradius ist: $R(t_0) = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$, und
- dessen Mittelpunkt $M_0$ auf der durch $P_0$ gehenden Normalen $N_0$ liegt.




## Krümmung, Krümmungsradius

**Definition**:
Die Krümmung einer regulären Kurve $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^T$, $t \in [a, b]$ mit zweimal stetig diff'baren Funktionen $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ beträgt im Punkt $P(t) = (x(t), y(t))^T$

$$\kappa(t) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^3}}.$$

Falls die Kurve als Graph der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))^T$ gegeben ist, ergibt sich

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{(1 + (f'(t))^2)^3}}.$$

$R = \frac{1}{|\kappa|}$ heißt Krümmungsradius.

# Definition

**Definition**: (Kurve im $\mathbb{R}^2$)
Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung

$$\mathbf{x} : [a,b] \to G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $x_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Kurvenstück in $G$ mit

- Anfangspunkt $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a))^\top$,
- Endpunkt $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b))^\top$,
- Spur $\{\mathbf{x}(t) | a \leq t \leq b\}$.

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem $\mathbb{R}^2$ werden Spaltenvektoren verwendet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^\top.$$

Ein Kurvenstück heißt regulär, wenn für alle $t \in [a,b]$ gilt:

$$\left(x_1'(t)\right)^2 + \left(x_2'(t)\right)^2 > 0.$$

Eine Parameterdarstellung des Kurvenstücks mit dem Parameter $t$ ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Durch wachsende Werte des Parameters $t$ ist für das Kurvenstück eine Orientierung gegeben.
Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken $K_i$ $(i = 1 : r)$, wobei der Anfangspunkt von $K_i$ dem Endpunkt von $K_{i-1}$ $(i = 2 : r)$ entspricht, heißt Kurve.
Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es oft auch als Kurve bezeichnet.

# Tangente, Normale, Bogendifferential

**Definition**:

- $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^\top$ heißt Tangentenvektor,
- $\mathbf{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))^\top$ heißt Normalenvektor,

der Kurve $\mathbf{x}(t)$ im Punkt $(x(t), y(t))^\top$.

**Bogenlänge**: (Bogendifferential)

$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt.$$

heißt Differential der Bogenlänge (oder Bogenelement), wobei $dt$ das Differential der unabhängigen Variablen $t$ ist.

# Krümmung, Krümmungsradius

**Definition**:
Die Krümmung einer regulären Kurve $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^\top$, $t \in [a, b]$ mit zweimal stetig diff'baren Funktionen $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ beträgt im Punkt $P(t) = (x(t), y(t))^\top$

$$\kappa(t) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^3}}.$$

Falls die Kurve als Graph der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))^\top$ gegeben ist, ergibt sich

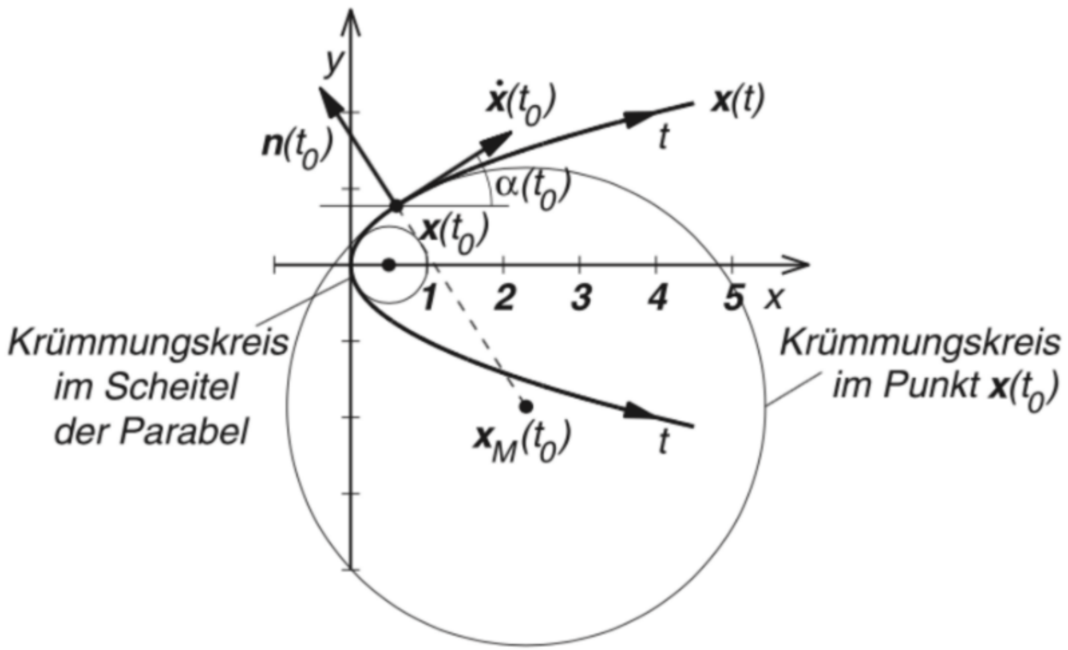
$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{(1 + (f'(t))^2)^3}}.$$

$R = \frac{1}{|\kappa|}$ heißt Krümmungsradius.

# Krümmungskreis

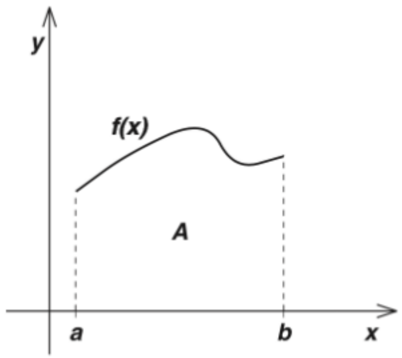
**Bemerkung** (Krümmungskreis):
Der Krümmungskreis einer Kurve im Punkt $P_0$ ist der Kreis,

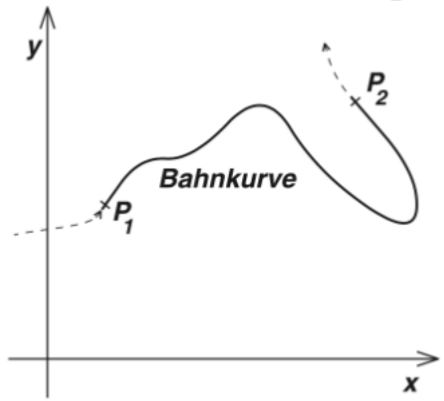
- der durch $P_0$ geht,
- dessen Radius gleich dem Krümmungsradius ist: $R(t_0) = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$, und
- dessen Mittelpunkt $M_0$ auf der durch $P_0$ gehenden Normalen $N_0$ liegt.



# Integrale
# Motivation

Exakte Berechnung von Flächen oder Bahnlängen



# Stammfunktion und unbestimmtes Integral

**Definition**:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion ($I \subset \mathbb{R}$). Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

Stammfunktion von $f$. Ist $F$ Stammfunktion von $f$, so heißt der Ausdruck

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$ einer Konstanten, unbestimmtes Integral der Funktion $f$.

- Die Konstante $C$ heißt Integrationskonstante.
- Das unbestimmte Integral von $f$ ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von $f$.
- Die Funktion $f$ heißt Integrand.

# Integrationsregeln

**Satz** (Linearität des unbestimmten Integrals):
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen mit Stammfunktionen und seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstante. Dann gilt

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))\ dx = c_1 \int f(x)\ dx + c_2 \int g(x)\ dx.$$

**Beweis**:
Folgt unmittelbar aus der Definition. $\square$

**Satz** (Substitutionsregel):
Sei $f$ stetige Funktion auf dem Intervall $J$ und $\phi$ stetig differenzierbar auf dem Intervall $I$. Es gelte $\phi(I) \subset J$ und die Umkehrfunktion $\phi^{-1}$ existiere. Dann gilt:

1. $\int f(\phi(x))\phi'(x)\ dx = \int f(t)\ dt, \quad$ mit $t = \phi(x)$,
2. $\int f(x)\ dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\ dt, \quad$ mit $x = \phi(t)$.

**Beweis:**
Folgt aus der Kettenregel der Differentiation:

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x)$$

mit $F'(x) = f(x)$. $\square$

**Bemerkung** (Partielle Integration):
Aus der Produktregel für die Differentiation folgt:

Für zwei auf einem Intervall $I$ stetig differenzierbare Funktionen $f$ und $g$ ist $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ und es gilt:

$$f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\ dx, \text{ bzw.}$$

$$\int f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ dx.$$

**Satz** (Linearität des unbestimmten Integrals):
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen mit Stammfunktionen und seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstante. Dann gilt

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x)) \; dx = c_1 \int f(x) \; dx + c_2 \int g(x) \; dx.$$

**Beweis**:
Folgt unmittelbar aus der Definition. $\square$

**Satz** (Substitutionsregel):
Sei $f$ stetige Funktion auf dem Intervall $J$ und $\phi$ stetig differenzierbar auf dem Intervall $I$. Es gelte $\phi(I) \subset J$ und die Umkehrfunktion $\phi^{-1}$ existiere. Dann gilt:

1. $\int f(\phi(x))\phi'(x)\ dx = \int f(t)\ dt, \quad$ mit $t = \phi(x)$,
2. $\int f(x)\ dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\ dt, \quad$ mit $x = \phi(t)$.

**Beweis**:
Folgt aus der Kettenregel der Differentiation:

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x)$$

mit $F'(x) = f(x)$. $\quad\square$

**Algorithmus** (Substitutionsregel):
Der Satz lässt sich anwenden:

1. Ersetze $\phi(x)$ durch $t$ (Substitution).
2. Wegen $\frac{dt}{dx} = \phi(x)$ ersetze $\phi'(x)\ dx$ durch $dt$.
3. Berechne $\int f(t)\ dt$ (statt $\int f(\phi(x))\phi'(x)\ dx$).
4. Ersetze $t$ durch $\phi(x)$ (Rücksubstitution).

2

**Bemerkung** (Partielle Integration):
Aus der Produktregel für die Differentiation folgt:

Für zwei auf einem Intervall $I$ stetig differenzierbare Funktionen $f$ und $g$ ist $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ und es gilt:

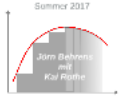
$$f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\; dx, \text{ bzw.}$$

$$\int f'(x)g(x)\; dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\; dx.$$

3

# Analysis II

Sommer 2017

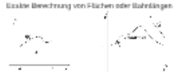



Integration

Buch Kapitel 2.13

## Integrale Motivation

Exakte Berechnung von Flächen oder Bahnlängen



## Stammfunktion und unbestimmtes Integral

**Definition**:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion ($I \subset \mathbb{R}$). Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

Stammfunktion von $f$. Ist $F$ Stammfunktion von $f$, so heißt der Ausdruck

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$ einer Konstanten, unbestimmtes Integral der Funktion $f$.

- Die Konstante $C$ heißt Integrationskonstante.
- Das unbestimmte Integral von $f$ ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von $f$.
- Die Funktion $f$ heißt Integrand.

1

## Erinnerung: Kurven

### Definition

### Tangente, Normale, Bogendifferential

### Krümmungskreis

### Krümmung, Krümmungsradius

## Integrationsregeln

## Infos zum Kurs

### Literatur

### Übungsleitung und Übungen

### Räume

Donnerstags: Audimax II

Freitags: Audimax I

## Ihr Professor

### Koordinaten:

### Hintergrund

### Forschungsinteressen