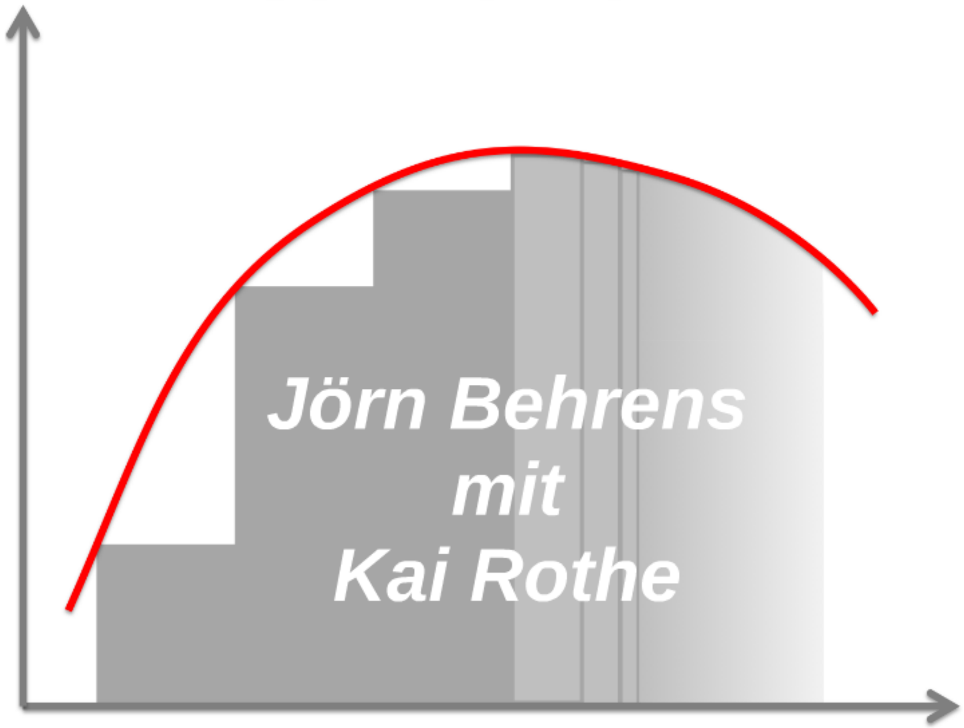
Analysis II

Sommer 2017



Partialbruchzerlegung

Buch Kapitel 2.13

Erinnerung: Integrationsregeln

Definition:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion ($I \subset \mathbb{R}$). Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

Stammfunktion von f. Ist F Stammfunktion von f, so heißt der Ausdruck

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$ einer Konstanten, unbestimmtes Integral der Funktion f.

- Die Konstante C heißt Integrationskonstante.
- Das unbestimmte Integral von f ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f.
- Die Funktion f heißt Integrand.

Satz (Linearität des unbestimmten Integrals):
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen mit Stammfunktionen und seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstante. Dann gilt

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))\ dx = c_1 \int f(x)\ dx + c_2 \int g(x)\ dx.$$

Beweis:
Folgt unmittelbar aus der Definition. □

Bemerkung (Partielle Integration):
Aus der Produktregel für die Differentiation folgt:

Für zwei auf einem Intervall I stetig differenzierbare Funktionen f und g ist $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ und es gilt:

$$f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\ dx, \text{ bzw.}$$
$$\int f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ dx.$$

Satz (Substitutionsregel):
Sei f stetige Funktion auf dem Intervall J und ϕ stetig differenzierbar auf dem Intervall I. Es gelte $\phi(I) \subset J$ und die Umkehrfunktion ϕ^{-1} existiere. Dann gilt:

1. $\int f(\phi(x))\phi'(x)\ dx = \int f(t)\ dt, \quad$ mit $t = \phi(x)$,
2. $\int f(x)\ dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\ dt, \quad$ mit $x = \phi(t)$.

Beweis:
Folgt aus der Kettenregel der Differentiation:

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x)$$

mit $F'(x) = f(x)$. □

Definition:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion ($I \subset \mathbb{R}$). Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

Stammfunktion von f. Ist F Stammfunktion von f, so heißt der Ausdruck

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$ einer Konstanten, unbestimmtes Integral der Funktion f.

- Die Konstante C heißt Integrationskonstante.
- Das unbestimmte Integral von f ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f.
- Die Funktion f heißt Integrand.

Satz (Linearität des unbestimmten Integrals):
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen mit Stammfunktionen und seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstante. Dann gilt

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))\ dx = c_1 \int f(x)\ dx + c_2 \int g(x)\ dx.$$

Beweis:
Folgt unmittelbar aus der Definition. $\square$

Satz (Substitutionsregel):
Sei f stetige Funktion auf dem Intervall J und ϕ stetig differenzierbar auf dem Intervall I. Es gelte $\phi(I) \subset J$ und die Umkehrfunktion ϕ^{-1} existiere. Dann gilt:

1. $\int f(\phi(x))\phi'(x)\ dx = \int f(t)\ dt, \quad$ mit $t = \phi(x)$,
2. $\int f(x)\ dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\ dt, \quad$ mit $x = \phi(t)$.

Beweis:
Folgt aus der Kettenregel der Differentiation:

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x)$$

mit $F'(x) = f(x)$. $\quad\square$

Bemerkung (Partielle Integration):
Aus der Produktregel für die Differentiation folgt:

Für zwei auf einem Intervall I stetig differenzierbare Funktionen f und g ist $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ und es gilt:

$$f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\ dx, \text{ bzw.}$$

$$\int f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ dx.$$

Exkurs: Polynome mit reellen Koeffizienten

Ziel: Polynome lassen sich leicht integrieren!

Satz (Nullstellenpaar):
Sei $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ Polynom mit $a_j \in \mathbb{R}$ und
sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine m-fache Nullstelle von p, d.h. $p(\alpha) = 0$.
Dann ist $\bar{\alpha} \in \mathbb{C}$ ebenfalls m-fache Nullstelle.

1

Satz (Quadratischer Faktor):
Das Produkt aus den Linearfaktoren $(x - z_j)$ und $(x - \bar{z}_j)$ ist Polynom 2. Grades mit ausschließlich reellen Koeffizienten.

2

Bemerkung: Fundamentalsatz der Algebra: p vom Grad $n \Rightarrow p$ hat n Nullstellen

- Grad n ungerade: p hat mindestens eine reelle Nullstelle.
- Grad n gerade: r Anzahl reelle Nullstellen von p gerade (möglich: $r = 0$).

Satz (Polynom-Zerlegung):
Sei $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $a_j \in \mathbb{R}$ Polynom vom Grad n.
Dann lässt sich p zerlegen in lineare und quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten:

$$p(x) = a_n \prod_{k=1}^{r} (x - z_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{s} (x^2 + p_j x + q_j)^{n_j},$$

mit $\sum_{k=1}^{r} m_k + 2 \sum_{j=1}^{s} n_j = n$.

3

Satz (Nullstellenpaar):
Sei $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ Polynom mit $a_j \in \mathbb{R}$ und
sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine m-fache Nullstelle von p, d.h. $p(\alpha) = 0$.
Dann ist $\bar{\alpha} \in \mathbb{C}$ ebenfalls m-fache Nullstelle.

1

Bemerkung: Fundamentalsatz der Algebra: p vom Grad $n \Rightarrow p$ hat n Nullstellen.

- Grad n ungerade: p hat mindestens eine reelle Nullstelle.
- Grad n gerade: r Anzahl reelle Nullstellen von p gerade (möglich: $r = 0$).

Satz (Quadratischer Faktor):
Das Produkt aus den Linearfaktoren $(x - z_j)$ und $(x - \bar{z}_j)$ ist Polynom 2. Grades mit ausschließlich reellen Koeffizienten.

2

Satz (Polynom-Zerlegung):
Sei $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $a_j \in \mathbb{R}$ Polynom vom Grad n.
Dann lässt sich p zerlegen in lineare und quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten:

$$p(x) = a_n \prod_{k=1}^{r} (x - z_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{s} (x^2 + p_j x + q_j)^{n_j},$$

mit $\sum_{k=1}^{r} m_k + 2 \sum_{j=1}^{s} n_j = n$.

3

Partialbruch-zerlegung

Bemerkung (Gebrochen Rationale Funktion):
Eine rationale Funktion ist entweder

- ganze rationale Funktion (Polynom), oder
- gebrochen rationale Funktion (Polynombruch):

$$\frac{p_n(x)}{q_m(x)}$$

Dabei sind $p_n(x)$ und $q_m(x)$ Polynome n-ten bzw. m-ten Grades (schreibe: $\deg(p_n) = n$ bzw. $\deg(q_m) = m$).

Gebrochen rationale Funktionen können echt ($n < m$) oder unecht ($n \geq m$) sein.

Bemerkung: Sei $\frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ gebrochen rational mit $n = \deg(p_n) \geq \deg(q_m) = m$.
Dann gibt es eindeutige Polynome $s(x)$ und $r(x)$, so dass

$$p_n(x) = s(x)q_m(x) + r(x).$$

Dabei ist $\deg(r) < \deg(q_m) = m$ und $\deg(s) = n - m$.

- Möglich: $r(x) \equiv 0$. Dann teilt q_m p_n und $\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = s(x)$.
- Falls $r(x) \not\equiv 0$, dann $\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q_m(x)}$ mit $\frac{r(x)}{q_m(x)}$ echt gebrochen rational.

4

Satz (Reelle Partialbruchzerlegung):
Seien $p_n(x)$ und $q_m(x)$ Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad n bzw. m, $n < m$.
Mit der Faktorenzerlegung von $q_m(x)$ existiert für das echt gebrochen rationale Polynom $r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ genau eine Zerlegung in Partialbrüche:

$$\begin{aligned} r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = {} & \frac{a_{11}}{x - x_1} + \frac{a_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} \\ & + \frac{a_{21}}{x - x_2} + \frac{a_{22}}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{a_{2m_2}}{(x-x_2)^{m_2}} \\ & + \quad \vdots \\ & + \frac{a_{\rho 1}}{x - x_\rho} + \frac{a_{\rho 2}}{(x-x_\rho)^2} + \cdots + \frac{a_{2m_\rho}}{(x-x_\rho)^{m_\rho}} \\ & + \frac{b_{11}x + c_{11}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \cdots + \frac{b_{1n_1}x + c_{1n_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{n_1}} \\ & + \frac{b_{21}x + c_{21}}{x^2 + p_2 x + q_2} + \cdots + \frac{b_{2n_2}x + c_{2n_2}}{(x^2 + p_2 x + q_2)^{n_2}} \\ & + \quad \vdots \\ & + \frac{b_{\sigma 1}x + c_{\sigma 1}}{x^2 + p_\sigma x + q_\sigma} + \cdots + \frac{b_{\sigma n_\sigma}x + c_{\sigma n_\sigma}}{(x^2 + p_\sigma x + q_\sigma)^{n_\sigma}}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} sind eindeutig bestimmt (und bestimmbar).

Erinnerung:
q_m kann in der Faktorenzerlegung dargestellt werden

$$q_m(x) = a_m \prod_{k=1}^{\rho} (x - x_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{\sigma} (x^2 + p_j x + q_j)^{n_j},$$

mit $\sum_{k=1}^{\rho} m_k + 2\sum_{j=1}^{\sigma} n_j = m$, $x_k \in \mathbb{R}$ Nullstellen, $x^2 + p_j x + q_j = (x - w_j)(x - \bar{w}_j)$ mit $w_j, \bar{w}_j \in \mathbb{C}$ Nullstellenpaare.

Bemerkung (Gebrochen Rationale Funktion):
Eine rationale Funktion ist entweder

- ganze rationale Funktion (Polynom), oder
- gebrochen rationale Funktion (Polynombruch):

$$\frac{p_n(x)}{q_m(x)}$$

Dabei sind $p_n(x)$ und $q_m(x)$ Polynome n-ten bzw. m-ten Grades (schreibe: $\deg(p_n) = n$ bzw. $\deg(q_m) = m$).

Gebrochen rationale Funktionen können echt $(n < m)$ oder unecht $(n \geq m)$ sein.

Bemerkung: Sei $\frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ gebrochen rational mit $n = \deg(p_m) \geq \deg(q_m) = m$. Dann gibt es eindeutige Polynome $s(x)$ und $r(x)$, so dass

$$p_n(x) = s(x)q_m(x) + r(x).$$

Dabei ist $\deg(r) < \deg(q_m) = m$ und $\deg(s) = n - m$.

- Möglich: $r(x) \equiv 0$. Dann teilt q_m p_n und $\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = s(x)$.
- Falls $r(x) \not\equiv 0$, dann $\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q_m(x)}$ mit $\frac{r(x)}{q_m(x)}$ echt gebrochen rational.

Erinnerung:
q_m kann in der Faktorenzerlegung dargestellt werden:

$$q_m(x) = a_n \prod_{k=1}^{\rho} (x - x_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{\sigma} (x^2 + p_j x + q_j)^{n_j},$$

mit $\sum_{k=1}^{\rho} m_k + 2 \sum_{j=1}^{\sigma} n_j = n$, $x_k \in \mathbb{R}$ Nullstellen, $x^2 + p_j x + q_j = (x - w_j)(x - \bar{w}_j)$ mit $w_j, \bar{w}_j \in \mathbb{C}$ Nullstellenpaare.

Satz (Reelle Partialbruchzerlegung):
Seien $p_n(x)$ und $q_m(x)$ Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad n bzw. m, $n < m$.
Mit der Faktorenzerlegung von $q_m(x)$ existiert für das echt gebrochen rationale Polynom $r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ genau eine Zerlegung in Partialbrüche:

$$
\begin{aligned}
r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} &= \frac{a_{11}}{x - x_1} + \frac{a_{12}}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1m_1}}{(x - x_1)^{m_1}} \\
&+ \frac{a_{21}}{x - x_2} + \frac{a_{22}}{(x - x_2)^2} + \cdots + \frac{a_{2m_2}}{(x - x_2)^{m_2}} \\
&+ \quad \vdots \\
&+ \frac{a_{\rho 1}}{x - x_\rho} + \frac{a_{\rho 2}}{(x - x_\rho)^2} + \cdots + \frac{a_{2m_\rho}}{(x - x_\rho)^{m_\rho}} \\
&+ \frac{b_{11}x + c_{11}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \cdots + \frac{b_{1n_1}x + c_{1n_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{n_1}} \\
&+ \frac{b_{21}x + c_{21}}{x^2 + p_2 x + q_2} + \cdots + \frac{b_{2n_2}x + c_{2n_2}}{(x^2 + p_2 x + q_2)^{n_2}} \\
&+ \quad \vdots \\
&+ \frac{b_{\sigma 1}x + c_{\sigma 1}}{x^2 + p_\sigma x + q_\sigma} + \cdots + \frac{b_{\sigma n_\sigma}x + c_{\sigma n_\sigma}}{(x^2 + p_\sigma x + q_\sigma)^{n_\sigma}}.
\end{aligned}
$$

Die Koeffizienten a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} sind eindeutig bestimmt (und bestimmbar).

Bemerkungen:

- Je Nullstelle/Nullstellenpaar existieren Vielfachheit-viele Partialbrüche
- Die Struktur der reellen/komplexen Partialbrüche ist offensichtlich
- Für die Koeffizienten entsteht nach Multiplikation mit $q_m(x)$

$$p_n(x) = b_{m-1}(x), \quad n \leq m-1.$$

- Koeffizientenvergleich von p_n und b_{m-1} ergibt Gleichungssystem für a, b, c.

Integration der Partialbrüche

Bemerkung (Strategie für die Partialbruchzerlegung):

1. Gegebenenfalls Polynomdivision um echt gebrochen rationale Funktion zu erhalten.
2. Bestimmung der Nullstellen des Nennerpolynoms bzw. Zerlegung in lineare/quadratische Faktoren.
3. Ansatz für die Partialbrüche nach Satz.
4. Bestimmung der Koeffizienten.

Beobachtung (Integration der Partialbruchzerlegung): Zur Berechnung der Stammfunktion einer echt gebrochen rationalen Funktion

$$\int \frac{p_n(x)}{q_m(x)}\,dx$$

reicht es nun, die folgenden Integrale zu bilden:

$$\int \frac{a}{(x-x_j)^\alpha}\,dx \quad \text{und} \quad \int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^\beta}\,dx$$

Betrachte beide Integraltypen getrennt.

1. Fall.Löse

$$\int \frac{a}{(x-x_j)^\alpha}\,dx$$

durch Substitution $t=(x-x_j)$:

$$\int \frac{a}{(x-x_j)^\alpha}\,dx = a\int \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \begin{cases} a\ln|x-x_j| & \text{für } \alpha = 1, \\ a\frac{1}{1-\alpha}(x-x_j)^{-\alpha+1} & \text{für } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

2. Fall Löse

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^\beta}\,dx =: I_\beta$$

für $\beta = 1$ durch Umformung und Substitution (Bärwolff S. 148)

$$I_1 = \frac{b}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{c-\frac{pb}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right) + C.$$

Für $\beta > 1$ erhält man (Bärwolff S. 149f.):

$$I_\beta = -\frac{b}{2(\beta-1)(x^2+px+q)^{\beta-1}} + \left(c-\frac{bp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\beta},$$

wobei das Integral rechts mit Hilfe der Rekursionsformel

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\beta} = \frac{1}{(\beta-1)(4q-p^2)}\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{\beta-1}} + \frac{2(2\beta-3)}{(\beta-1)(4q-p^2)}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\beta-1}}$$

und

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)$$

gelöst wird.

Bemerkung (Strategie für die Partialbruchzerlegung):

1. Gegebenenfalls Polynomdivision um echt gebrochen rationale Funktion zu erhalten.
2. Bestimmung der Nullstellen des Nennerpolynoms bzw. Zerlegung in lineare/quadratische Faktoren.
3. Ansatz für die Partialbrüche nach Satz.
4. Bestimmung der Koeffizienten.

Bemerkung (Methoden zur Bestimmung der Koeffizienten):

- Koeffizientenvergleich führt auf eindeutig lösbares Gleichungssystem.
- Grenzwertmethode: Streng genommen gilt $p_n(x) = b_{m-1}(x)$ nur für $x \neq x_1, x_2, \ldots, x_\rho$, so dass

$$\lim_{x \to x_j} p_n(x) = \lim_{x \to x_j} b_{m-1}(x)$$

  betrachtet wird. Im Beispiel wird der Grenzwert durch einsetzen von $x = x_j$ bestimmt.
- Methode des Zuhaltens für Linearfaktoren.

Beobachtung (Integration der Partialbruchzerlegung): Zur Berechnung der Stammfunktion einer echt gebrochen rationalen Funktion

$$\int \frac{p_n(x)}{q_m(x)}\, dx$$

reicht es nun, die folgenden Integrale zu bilden:

$$\int \frac{a}{(x-x_j)^\alpha}\, dx \quad \text{und} \quad \int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^\beta}\, dx$$

Betrachte beide Integraltypen getrennt.

1. Fall: Löse

$$\int \frac{a}{(x-x_j)^\alpha}\, dx$$

durch Substitution $t = (x - x_j)$:

$$\int \frac{a}{(x-x_j)^\alpha}\, dx = a \int \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \begin{cases} a \ln|x - x_j| & \text{für } \alpha = 1, \\ a \frac{1}{1-\alpha}(x-x_j)^{-\alpha+1} & \text{für } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

2. Fall:Löse

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^\beta}\ dx =: I_B$$

für $\beta = 1$ durch Umformung und Substitution (Bärwolff S. 149):

$$I_B = \frac{b}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{c-p\frac{b}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right) + C.$$

Für $\beta > 1$ erhält man (Bärwolff S. 149f.):

$$I_B = -\frac{b}{2(\beta-1)(x^2+px+q)^{\beta-1}} + (c-\frac{bp}{2})\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\beta},$$

wobei das Integral rechts mit Hilfe der Rekursionsformel

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\beta} = \frac{1}{(\beta-1)(4q-p^2)}\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{\beta-1}} + \frac{2(2\beta-3)}{(\beta-1)(4q-p^2)}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\beta-1}}$$

und

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)$$

gelöst wird.

Erinnerung: Integrationsregeln

Integration der Partialbrüche

Analysis II

Exkurs: Polynome mit reellen Koeffizienten

Ziel: Polynome lassen sich leicht integrieren!

Partialbruch-zerlegung