

ANALYSIS II

J. Behrens

01.06.2017

① Berechnung von $\exp(x)$:

Ziel: Berechnung von $\exp(x)$ für gegebenes x
(Mit Hilfe von elementaren Operationen $+ - * \div$ - Taschenrechner)
mit einer vorgegebenen Genauigkeit (z.B. 10^{-8})

• Satz von Taylor:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x) \quad \text{wobei } R_n(x) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$\xi \in [0, x]$

• Finde n : $|R_n(x)| \leq 10^{-8}$

• Beispiel $\exp(\sqrt{3})$, d.h. $x = \sqrt{3}$

• Wegen der Monotonie gilt:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \left| \frac{\exp 2}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \\ &= \frac{e^2}{(n+1)!} (\sqrt{3})^{n+1} < \frac{3^2}{(n+1)!} 2^{n+1} \end{aligned}$$

• "Probieren" ergibt für $n=17$

$$(n+1)! = 18! = 6402373703728000 > 6 \cdot 10^{15}$$

$$2^{n+1} = 2^{18} = 262144 < 3 \cdot 10^5$$

$$|R_n(x)| < \frac{3^2}{(n+1)!} 2^{n+1} < \frac{9}{6 \cdot 10^{15}} 3 \cdot 10^5 = 4.5 \cdot 10^{-10}$$

$$\bullet |R_{17}(\sqrt{3})| < 4.5 \cdot 10^{-10}$$

$$\exp(\sqrt{3}) = \sum_{k=0}^{16} \frac{\sqrt{3}^k}{k!} \quad \text{mit Genauigkeit von } 10^{-8}.$$

Bemerkungen zum Logarithmus:

$\log_a x$ ist Umkehrfunktion zu a^x

• Für $a=e$: $\log_e x = \ln x$ natürliche Logarithmus

• Für $a=10$: $\log_{10} x = \lg x$ dekadischer Logarithmus

② zur Eulerschen Formel:

• $\exp(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

• Für $z = ix$:

$$\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

$$= \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots}_{\cos x} + i \underbrace{\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)}_{\sin x}$$

• Mit den Definitionen von $\cos x$ und $\sin x$ als Reihen gilt:

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x. \quad \textcircled{a}$$

• Analog $\exp(-ix) = \cos x - i \sin x. \quad \textcircled{b}$

• Weiter folgt aus der Kombination aus \textcircled{a} und \textcircled{b} :

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

③ Nachweis von Nullstellen der \cos -Fkt.:

1. Schritt: $\sin x > 0$ in $]0, 2[$

Sortiere die Reihe um (geht vj. absolute Konvergenz)

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) + \frac{x^5}{120} \left(1 - \frac{x^2}{42}\right) + \dots + \frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4m+2)(4m+3)}\right) + \dots$$

für $x \in]0, 2[$ ist also $\sin x > 0$.

2. Schritt: $\cos(0) = 1$, Bestimme $\cos(2)$

$$\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \dots$$

$$\text{Es gilt } \frac{2^2}{2!} > \frac{2^4}{4!} > \frac{2^6}{6!} > \dots$$

Da $\cos(2)$ -Reihe ist alternierende Zahlenreihe mit monoton fallenden Gliedern

$$\Rightarrow \cos(2) < 1 - 2 + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3} < 0$$

3. Schritt: Monotonie \cos . Sei $0 < x_1 < x_2 < 2$

$$\cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_1+x_2}{2} \sin \frac{x_2-x_1}{2} < 0$$

$\in]0, 2[$ $\sin > 0$ in $]0, 2[$
 $\Rightarrow \cos$ ist in $]0, 2[$ streng monoton fallend

4. Schritt: Anwendung Mittelwertsatz:

Da \cos stetig (beständig konvergente Potenzreihe) und streng monoton fallend in $]0, 2\pi[$ mit $\cos(0) > 0$ und $\cos(2\pi) < 0$

Mittelwertsatz

$$\implies \exists \xi \text{ in }]0, 2\pi[: \cos(\xi) = 0$$

Diese Stelle nennen wir $\xi = \frac{\pi}{2}$

$$\text{d.h. } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Nullstelle ist eindeutig wg. strenger Monotonie.

④ Periodizität von \sin :

- Wegen $\sin 2x = 2 \cos x \sin x$, Positivität von \cos in $]0, \frac{\pi}{2}[$ und $\sin x > 0$ in $]0, 2\pi[$

$$\implies \sin x > 0 \text{ für } 0 < x < \pi \text{ und } \sin \pi = 0$$

- Aus $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ folgt

$$\cos \pi = 2 \cos^2 \frac{\pi}{2} - 1 = -1$$

- Aus der Additionsformel

$$\sin(x + \pi) = \sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi = -\sin x$$

-

• Daher

$$\begin{aligned}\sin(x+2\pi) &= \sin(x+\pi+\pi) \\ &= \sin(x+\pi)\cos\pi + \cos(x+\pi)\sin\pi \\ &= -\sin x(-1) = \sin x\end{aligned}$$

Analog für $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ \square