Notizen zur Vorlesung 1

Integralrechnung

Kai Rothe

Technische Universität
Hamburg-Harburg

Donnerstag 6.4. und Freitag 7.4.2017

Anwendungen der Integralrechnung

Beispiel:

Durch Integration kann für eine gegebene Funktion

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$$

die Fläche, die sich im Intervall $[a, b]$ zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse befindet, berechnet werden.

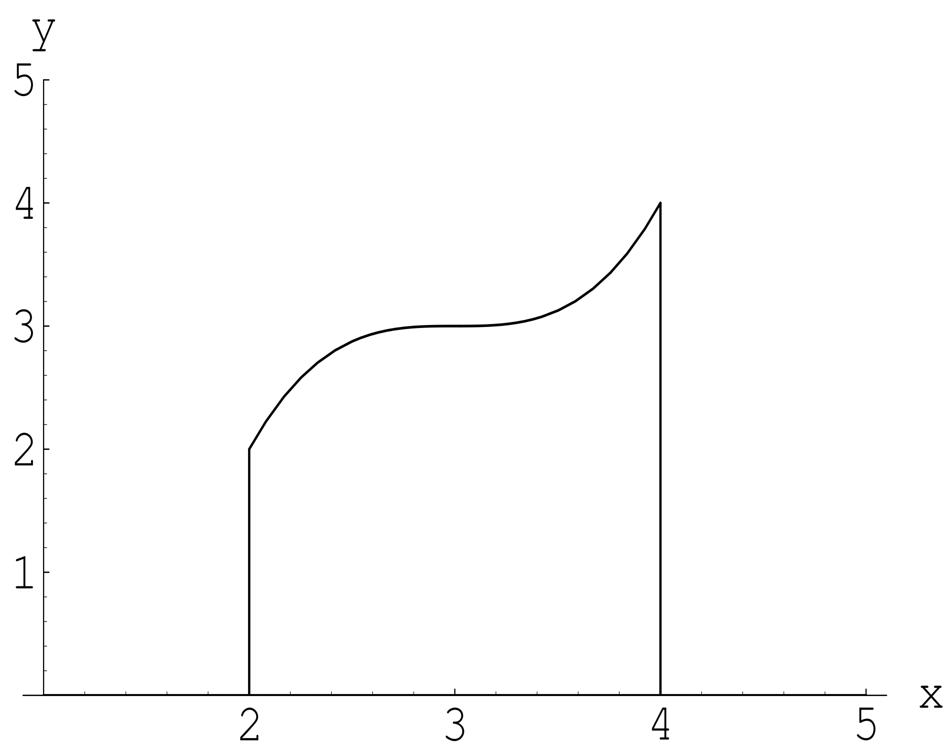


Bild Funktionsgraph $f(x) = (x-3)^3 + 3\,, \quad x \in [2, 4]$

Beispiel:

Durch Integration kann die Länge einer Kurve zwischen zwei Punkten berechnet werden.

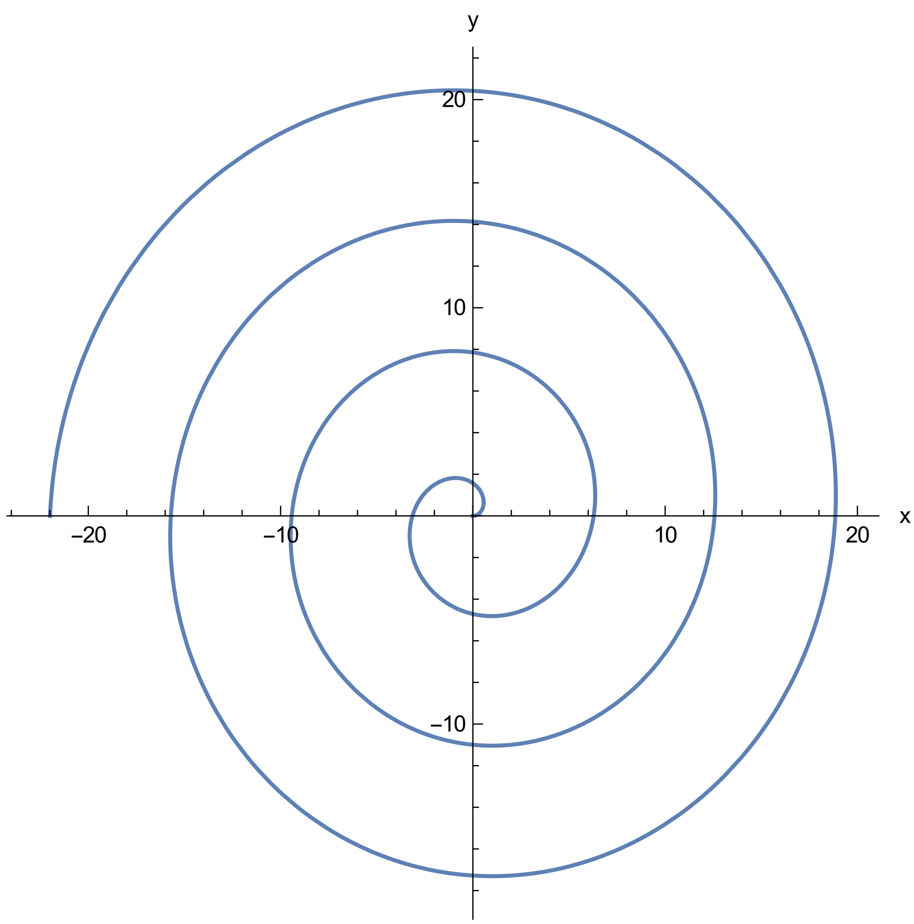


Bild archimedische Spirale mit 3.5 Umläufen

Definition

Gegeben sei die Funktion

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

und die differenzierbare Funktion

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}.$$

Man nennt man F **Stammfunktion** von f, wenn gilt

$$F' = f\ .$$

Ist F eine Stammfunktion von f, dann heißt

$$\int f(x)\,dx := F + C\ , \quad C \in \mathbb{R},\ C = \text{const.}$$

unbestimmtes Integral von f. Die Funktion f heißt **Integrand** und C **Integrationskonstante**.

Bemerkungen:

1. Jedes unbestimmte Integral ist wieder Stammfunktion von f.
$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F + C)' = F' = f$$
2. Wenn man ein Funktion integriert, so sucht man nach ihrer Stammfunktion.

Wie integriert man?

Durch Differenzieren elementar bekannter Funktionen sind die Stammfunktionen dieser berechneten Ableitungen bekannt.

Mit Hilfe von **Integrationsregeln** können dann für weitere Funktionen, die sich aus Funktionen mit bekannten Stammfunktionen zusammensetzen, Stammfunktionen berechnet werden.

Beispiel:

$$F(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad F'(x) = 3\,x^2 = f(x)$$

oder umgekehrt

$$f(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \int 3x^2 dx = x^3 + C = F(x)$$

Beispiel:

$$F(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$$

oder umgekehrt

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x}+C = x^{1/2}+C = F(x)$$

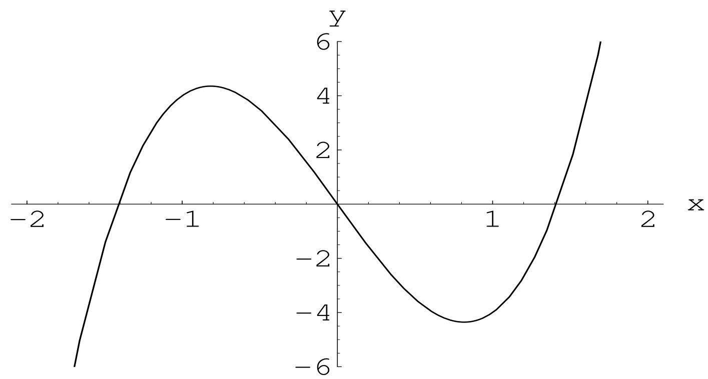
Beispiel:

$$F(x) = \frac{\sin^2 x}{2} \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \sin x \cos x = f(x)$$

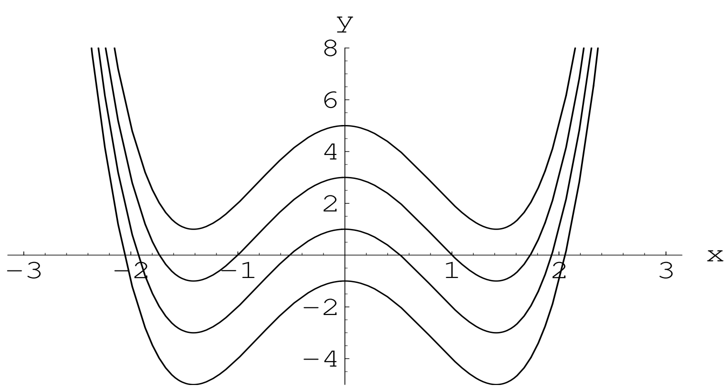
oder umgekehrt

$$f(x) = \sin x \cos x \quad \Rightarrow \quad \int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2}+C = F(x)$$

Beispiel:



$$p(x) = 4x^3 - 8x$$



$$\int p(x)dx = x^4 - 4x^2 + C$$

Bemerkungen:

- Die Stammfunktion ist bis auf eine Integrationskonstante C eindeutig bestimmt. F_1 und F_2 seien zwei beliebige Stammfunktionen von f

  $$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0 \Rightarrow F_1 - F_2 = C\,.$$

- Die Ableitung einer Stammfunktion zu f ist f selbst.

Tabelle einiger Stammfunktionen:

$f(x)$	$F(x) = \int f(x)\,dx + C\ ,$	$C \in \mathbb{R}$
a	$ax + C\ ,$	$a \in \mathbb{R}$
x	$\dfrac{x^2}{2} + C$	
x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ ,$	$\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$
e^x	$e^x + C$	
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	
$\sin x$	$-\cos x + C$	
$\cos x$	$\sin x + C$	
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$	
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	
$\sinh x$	$\cosh x + C$	
$\cosh x$	$\sinh x + C$	

Integrationsregeln

Satz: (Linearität des unbestimmten Integrals)

Für $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien Stammfunktionen bekannt.

Mit den Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx$$

$$= \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x)\, dx + C\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

Beweis:

Mit der Linearität der Ableitung erhält man

$$\left(\alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x)\, dx + C\right)'$$

$$= \alpha \left(\int f(x) dx\right)' + \beta \left(\int g(x)\, dx\right)'$$

$$= \alpha f(x) + \beta g(x)\,.$$

Beispiel:

$$\int 4x - 3\sin x\, dx$$

$$= 4\int x\, dx - 3\int \sin x\, dx$$

$$= 4\cdot\frac{x^2}{2} + 3\cos x + C$$

$$= 2x^2 + 3\cos x + C = F(x)$$

Probe:

$$F'(x) = (2x^2 + 3\cos x + C)' = 2(x^2)' + 3(\cos x)'$$

$$= 4x - 3\sin x$$

Beispiel:

$$\int \frac{3}{1+x^2} + \frac{4}{x}\,dx$$

$$= 3\int \frac{1}{1+x^2}\,dx + 4\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= 3\arctan x + 4\ln|x| + C = F(x)$$

Probe:

$$F'(x) = (3\arctan x + 4\ln|x| + C)'$$

$$= 3(\arctan x)' + 4(\ln|x|)'$$

$$= \frac{3}{1+x^2} + \frac{4}{x}$$

Substitutionsregel

Die Funktion

$$\begin{aligned} g : [a,b] &\to [c,d] \\ t &\mapsto x = g(t) \end{aligned}$$

sei stetig differenzierbar und die stetige Funktion

$$\begin{aligned} f : [c,d] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

besitze die Stammfunktion $F(x)$, dann ergibt sich aus der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= F(x) + C = F(g(t)) + C = \int \frac{dF}{dt}(g(t))\,dt \\ &= \int \frac{dF}{dx}(g(t))\frac{dg}{dt}(t)\,dt \\ &= \int f(g(t))g'(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

Satz: (Substitutionsregel)

Sei f stetig auf dem Intervall $[a, b]$
und g stetig differenzierbar auf dem Intervall $[c, d]$
und es existiere die Umkehrfunktion g^{-1} zu g,
dann gilt mit der Substitution $x = g(t)$ und der

Merkregel: $\frac{dx}{dt} = g'(t) \leftrightarrow dx = g'(t)dt$

1. $$\begin{aligned} \int f(g(t))g'(t)\, dt &= \int f(x)\, dx\,, \quad \text{Substitution} \\ &= F(x) + C\,, \quad \text{Stammfunktion} \\ &= F(g(t)) + C\,, \quad \text{Rücksubstitution} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \int f(x)\, dx &= \int f(g(t))g'(t)\, dt\,, \quad \text{Substitution} \\ &=: \int \tilde{f}(t)\, dt \\ &= \tilde{F}(t) + C\,, \quad \text{Stammfunktion} \\ &= \tilde{F}(g^{-1}(x)) + C\,, \quad \text{Rücksubstitution} \\ &=: F(x) + C \end{aligned}$$

Beispiel

$$\int \cos t \sin^2 t \, dt$$

Substitution $\quad x = \sin t \quad \to \quad dx = \cos t dt$

$$\begin{aligned}
\int \cos t \sin^2 t \, dt &= \int (\sin t)^2 (\cos t \, dt) \\
&= \int x^2 \, dx \ , \quad \text{Substitution} \\
&= \frac{x^3}{3} + C \ , \quad \text{Stammfunktion} \\
&= \frac{\sin^3 t}{3} + C \ , \quad \text{Rücksubstitution}
\end{aligned}$$

alternativ, wenn man die Ableitung $g'(t)$ nicht erkennt:

Substitution $\quad x = \sin t \quad \to \quad dt = \dfrac{dx}{\cos t}$

$$\begin{aligned}
\int \cos t \sin^2 t \, dt &= \int (\cos t) \, x^2 \, \frac{dx}{\cos t} \\
&= \int x^2 \, dx
\end{aligned}$$

Beispiel

$$\int \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt$$

Substitution $\quad x = g(t) \quad \to \quad dx = g(t)'dt$

$$\int \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt \;=\; \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C = \ln|g(t)| + C$$

Beispiel

$$\int \frac{6t^2}{t^3+5}\,dt$$

Substitution $\quad x = t^3 + 5 \quad \to \quad dx = 3t^2dt$

$$\int \frac{6t^2}{t^3+5}\,dt \;=\; 2\int \frac{3t^2}{t^3+5}\,dt = 2\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$=\; 2\ln|x| + C = 2\ln|t^3+5| + C$$

Beispiel

Berechnet werden soll für $t > 0$:

$$\int \frac{(\ln t)^2}{t}\, dt$$

Substitution $\quad x = \ln t \quad \to \quad dx = \frac{1}{t}dt$

$$\int \frac{(\ln t)^2}{t}\, dt \;=\; \int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 + C = \frac{1}{3}(\ln t)^3 + C$$

Beispiel

$$\int e^{\sin t} \cos t\, dt$$

Substitution $\quad x = \sin t \quad \to \quad dx = \cos t dt$

$$\begin{aligned} \int e^{\sin t} \cos t\, dt \;&=\; \int e^x\, dx \\ &=\; e^x + C = e^{\sin t} + C \end{aligned}$$

Beispiel

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Lösung:

Additionstheorem: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

Für $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$ existiert die Umkehrfunktion zu sin

$$x = \sin t \quad \Leftrightarrow \quad t = \arcsin x\ .$$

Dann gilt: $\cos t > 0 \quad \Rightarrow \quad \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$

Substitution $\quad x = \sin t \quad \rightarrow \quad dx = \cos t dt$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\,\cos t\,dt \\
&= \int dt \\
&= t + C \\
&= \arcsin x + C
\end{aligned}$$

Partielle Integration

Satz: (partielle Integrationsregel)
Für stetig differenzierbare Funktionen

$$u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$$

gilt

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx + C\,.$$

Beweis:

Integration der Produktregel ergibt:

$$\begin{aligned} u(x)v(x) + C &= \int (u(x)v(x) + C)'\,dx \\ &= \int u'(x)v(x) + u(x)v(x)'\,dx \\ &= \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v(x)'\,dx\,. \end{aligned}$$

Beispiel

$$\int xe^x\,dx = \int x\cdot e^x\,dx\,,$$

$$\text{setze}\quad u = x\,,\; v' = e^x$$

$$\Rightarrow\quad u' = 1\,,\; v = e^x$$

$$= x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx + C$$

$$= xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

Beispiel

$$\int x\sin x\,dx = \int x\cdot\sin x\,dx$$

$$\text{setze}\quad u = x\,,\; v' = \sin x$$

$$\Rightarrow\quad u' = 1\,,\; v = -\cos x$$

$$= x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx + C$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

mehrmalige partielle Intergation

$$\int x^3 e^x \, dx$$

erste partielle Integration:

setze $u = x^3 \, , \; v' = e^x$

$\Rightarrow \quad u' = 3x^2 \, , \; v = e^x$

$$= x^3 e^x - \int 3x^2 e^x \, dx + C$$

zweite partielle Integration:

setze $u = 3x^2 \, , \; v' = e^x$

$\Rightarrow \; u' = 6x \, , \; v = e^x$

$$= x^3 e^x - \left(3x^2 e^x - \int 6x e^x \, dx \right) + C$$

dritte partielle Integration:

setze $u = 6x \, , \; v' = e^x$

$\Rightarrow \; u' = 6 \, , \; v = e^x$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - \int 6 e^x \, dx + C$$

$$= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x + C$$

künstliches Einfügen der 1

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx$$

partielle Integration,

setze $\quad u' = 1\,,\ v = \ln x$

$\Rightarrow \quad u = x\,,\ v' = \dfrac{1}{x}$

$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx + C$$

$$= x \ln x - \int 1 \, dx + C$$

$$= x \ln x - x + C$$

$$= x(\ln x - 1) + C$$

partielle Integration wieder umkehren

$\int x^2 \sin x \, dx$ erste partielle Integration:

setze $u = x^2$, $v' = \sin x$

$\Rightarrow \quad u' = 2x$, $v = -\cos x$

$$= x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)\, dx + C$$

zweite partielle Integration:

setze $u' = 2x$, $v = -\cos x$

$\Rightarrow \quad u = x^2$, $v' = \sin x$

$$= x^2(-\cos x) - (x^2(-\cos x)$$

$$- \int x^2 \sin x \, dx) + C$$

$$= \int x^2 \sin x \, dx + C \quad \Rightarrow C = 0$$

Ergebnis:
Partielle Integration wurde rückgängig gemacht.

vergebliche partielle Integration

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \sin x \cdot \sin x \, dx$$

erste partielle Integration:

setze $\quad u = \sin x \, , \; v' = \sin x$

$\Rightarrow \quad u' = \cos x \, , \; v = -\cos x$

$$= \sin x(-\cos x) - \int \cos x(-\cos x) \, dx + C$$

$$= -\sin x \cos x + \int \cos x \cos x \, dx + C$$

zweite partielle Integration:

setze $\quad u = \cos x \, , \; v' = \cos x$

$\Rightarrow \quad u' = -\sin x \, , \; v = \sin x$

$$= -\sin x \cos x + \cos x \sin x$$

$$- \int -\sin x \sin x \, dx + C$$

$$= \int \sin x \sin x \, dx + C \qquad \Rightarrow C = 0$$

$$= \int \sin^2 x \, dx$$

Integral taucht rechts wieder auf

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \sin x \cdot \sin x\, dx$$

partielle Integration:
setze $u = \sin x$, $v' = \sin x$
$\Rightarrow \quad u' = \cos x$, $v = -\cos x$

$$= -\sin x \cos x - \int \cos x(-\cos x)\, dx + \tilde{C}$$

$$= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\, dx + \tilde{C}$$

Additionstheorem verwenden:
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\Rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$= -\sin x \cos x + \int 1 - \sin^2 x\, dx + \tilde{C}$$

$$= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x\, dx + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow \quad 2\int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cos x + x + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$$

nicht die Integrationkonstante vergessen!

$$\int \tan x \, dx = \int \sin x \cdot \cos^{-1} x \, dx$$

partielle Integration:
setze $u' = \sin x \,,\ v = \cos^{-1} x$
$\Rightarrow \quad u = -\cos x \,,\ v' = \sin x \cos^{-2} x$

$$= -\cos x \cos^{-1} x + \int \sin x \cos^{-1} x \, dx$$

$$= -1 + \int \tan x \, dx$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -1$$

Dies ist natürlich falsch.

Es fehlte die Integrationskonstante:

$$\int \tan x \, dx = \cdots$$

$$\vdots$$

$$= -1 + \int \tan x \, dx + C$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

Partielle Integration führt hier nicht zum Ziel.