Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Timo Reis
Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Sommersemester 2018

Allgemeine Informationen

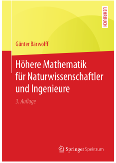
Informationsquellen

- **Internet**
  https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/18
- **Übungen in Tutorgruppen**
  Dr. Hanna Peywand Kiani und Übungsgruppenleiter(innen)
- **Anleitung zu den Übungen** (14-täglich)
  Dr. Hanna Peywand Kiani.
- **Sprechstunde Prof. Reis**
  Mittwoch, E 3.079, 15:00–16:00

Literatur

PRIMÄR:

G. Bärwolff: **Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure**,
3. Auflage. Springer 2017
`http://www.springer.com/de/book/9783662550212`



SEKUNDÄR:

R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure 1,
3. Auflage. WILEY-VCH, 2000.

FORMELSAMMLUNG:

K. Vetters: **Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik**, Vieweg+Teubner, 2004

Inhalt der Analysis II

1. Integration (bestimmte Integrale, Hauptsatz, Integrationsregeln, uneigentliche Integrale, parameterabhängige Integrale)
2. Anwendungen der Integralrechnung (Volumen und Mantelfläche von Rotationskörpern, Kurven und Bogenlänge, Kurvenintegrale)
3. periodische Funktionen und Fourier-Reihen
4. Potenzreihen und elementare Funktionen
5. Interpolation

Integration

Integration

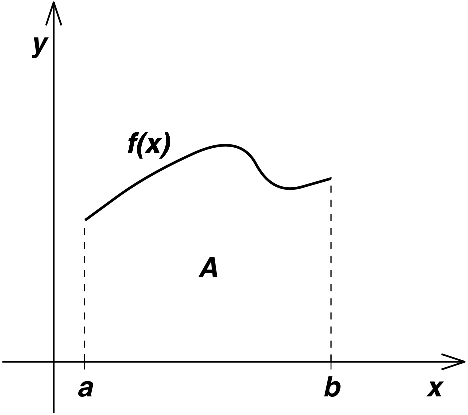


Abbildung 2.52: Fläche A unter dem Graph der Funktion f

Integration

Beispiel

Integration

Beispiel

Integration

Beispiel

Integration, Zerlegungen

Buch Kap. 2.13

Zerlegung

- Es wird eine Streifeneinteilung gebildet, wobei jeweils Streifen der Breite Δx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, mit den beliebig gewählten Punkten $x_0, x_1, x_2,\ldots,x_n$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

  betrachtet werden.
- Die Menge der so gebildeten Teilintervalle

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

  heißt Zerlegung Z des Intervalls $[a, b]$.

Integration, Zerlegungen

Buch Kap. 2.13

Zerlegung

- Die größte der Teilintervalllängen Δx_i

$$|Z| := \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Delta x_i$$

heißt Feinheit der Zerlegung Z.

- Man bildet in jedem Streifen zwei Rechtecke, die die Fläche von f von "oben" und von "unten" annähern. Falls f beschr"ankt ist, existiert auf allen Teilintervallen obere und untere Grenze

$$M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \qquad m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \,.$$

Integration, Zerlegungen

Buch Kap. 2.13

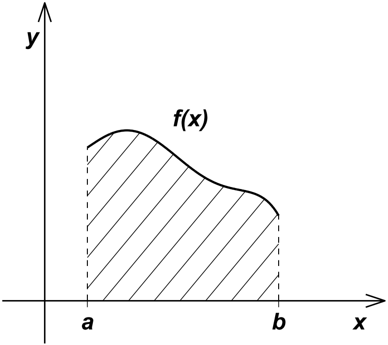
Ober-/Untersumme

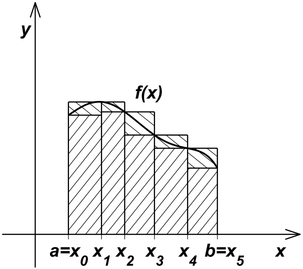
- Über dem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ entsteht ein ”unteres” Rechteck mit dem Flächeninhalt $m_i \Delta x_i$ und ein ”oberes” Rechteck mit dem Flächeninhalt $M_i \Delta x_i$.
- Eine Summation über i ergibt

$$
\begin{aligned}
S_f(Z) &:= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad \text{die Obersumme von } f \text{ bezüglich } Z, \text{ und} \\
s_f(Z) &:= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad \text{die Untersumme von } f \text{ bezüglich } Z.
\end{aligned}
$$

Integration, Zerlegungen

Buch Kap. 2.13





Integration, Zerlegungen

Ober-/Untersumme

- Wählt man mit ξ_i einen beliebigen Punkt aus dem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, so gilt $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ und deshalb auch
$$s_f(Z) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq S_f(Z)\,.$$
- Die Summe $R(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ heißt Riemannsche Summe bezüglich der Zerlegung Z.

Integration, Zerlegungen

Buch Kap. 2.13

Ober-/Unterintegral

- Bei immer feiner werdenden Zerlegungen die Obersummen im Allg. immer kleiner und die Untersummen immer größer werden.

$$
\begin{aligned}
\overline{I}_f &:= \inf_Z S_f(Z), \qquad \text{genannt Oberintegral von } f, \\
\underline{I}_f &:= \sup_Z s_f(Z), \qquad \text{genannt Unterintegral von } f.
\end{aligned}
$$

Dabei bedeutet $\inf_Z$ und $\sup_Z$, dass das Supremum bzw. Infimum über der Menge aller Zerlegungen gebildet wird.

Integration, Zerlegungen

Ober-/Unterintegral

- Sind Z_1 und Z_2 zwei beliebige, unterschiedliche Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$, dann kann man eine verfeinerte Zerlegung Z aus den Durchschnitten der Teilintervalle von Z_1 und Z_2 bilden. Es gilt dann

$$s_f(Z_1) \leq s_f(Z) \leq R(Z) \leq S_f(Z) \leq S_f(Z_2) \; ,$$

$$s_f(Z_2) \leq s_f(Z) \leq R(Z) \leq S_f(Z) \leq S_f(Z_1) \; .$$

Integration, Zerlegungen

Buch Kap. 2.13

Ober-/Unterintegral

- Konsequenz: Für beliebige Zerlegungen Z_1, Z_2 gilt

$$s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2) \quad \text{und} \quad s_f(Z_2) \leq S_f(Z_1)$$

  ist. Daher ist die Menge der Obersummen nach unten beschränkt ist, und die Menge der Untersummen nach oben.

- Daraus folgt die Existenz von $\overline{I}_f$ und $\underline{I}_f$ und

$$\underline{I}_f \leq \overline{I}_f.$$

  Es folgt

$$\underline{I}_f \leq R(Z) \leq \overline{I}_f.$$

Integration, Zerlegungen

Ober-/Unterintegral

- Für stetige Funktionen auf jeden Fall, aber auch für viele andere übliche Funktionen ist $\underline{I}_f = \overline{I}_f$. Ist (Z_k) eine Zerlegungsfolge, für die $\lim_{k\to\infty} |Z_k| = 0$ gilt, so heißt (Z_k) oder zulässige Zerlegungsfolge. Gilt $\underline{I}_f = \overline{I}_f$, so folgt

$$\lim_{k\to\infty} s_f(Z_k) = \underline{I}_f = \lim_{k\to\infty} R(Z_k) = \overline{I}_f = \lim_{k\to\infty} S_f(Z_k)\ .$$

Die durchgeführten Betrachtungen rechtfertigen die folgende Definition.

Integration, Zerlegungen

Buch Kap. 2.13

Definiton 2.34: (Integrierbarkeit, RIEMANNsches Integral)

Eine auf $[a, b]$ beschränkte Funktion f heißt im Intervall $[a, b]$ RIEMANN-integrierbar, falls das Unter- und Oberintegral von f übereinstimmen, also

$$\underline{I}_f = \overline{I}_f.$$

Der gemeinsame Grenzwert $\overline{I}_f = \underline{I}_f$ wird bestimmtes RIEMANNsches Integral von $f(x)$ über $[a, b]$ genannt und mit

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet.

a heißt untere und b obere Integrationsgrenze und $[a, b]$ wird Integrationsintervall genannt. x heißt Integrationsvariable und $f(x)$ Integrand.

Riemann-Integral

Satz 2.33: (RIEMANNsches Integral)

Für jede beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt:
f ist genau dann integrierbar, wenn jede Folge RIEMANNscher Summen $R(Z_k)$ von f, bei denen die Feinheiten $|Z_k|$ der zugehörigen Zerlegungen gegen Null streben und die Punkte ξ_i in den Teilintervallen von Z_k beliebig gewählt werden, gegen denselben Grenzwert konvergiert. Dieser Grenzwert ist dann gleich $\int_a^b f(x)\,dx$, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} R(Z_k) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Riemann-Integral

Beispiele

Riemann-Integral

Satz 2.34: (Stetigkeit $\Longrightarrow$ Integrierbarkeit)

Eine auf $[a, b]$ stetige Funktion ist integrierbar.
Das gilt auch für stückweise stetige Funktionen, die auf $[a, b]$ mit Ausnahme endlich vieler Sprungstellen stetig sind.

Satz 2.35: (Mittelwertsätze der Integralrechnung)

1. **Mittelwertsatz der Integralrechnung**
   Ist die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $\xi \in]a, b[$ mit
   $$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a).$$

2. **verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung**
   Sind die Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und ist $g(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$, so existiert ein $\xi \in]a, b[$ mit
   $$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx.$$

Riemann-Integral

Buch Kap. 2.13

Satz 2.36: (Rechenregeln der Integralrechnung)

Seien f und g integrierbare Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, $a < c < b$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, dann gilt

- $\int_a^b (c_1 f + c_2 g)\, dx = c_1 \int_a^b f\, dx + c_2 \int_a^b g\, dx$,
- $\left| \int_a^b f\, dx \right| \leq \int_a^b |f|\, dx$,
- $\int_a^b f\, dx = \int_a^c f\, dx + \int_c^b f\, dx$,
- $f \geq 0$ auf $[a, b] \Longrightarrow \int_a^b f\, dx \geq 0$,
- ist f auf $[a, b]$ stetig und nichtnegativ, sowie $\int_a^b f\, dx = 0$, so folgt $f \equiv 0$.

Definition 2.33: (Stammfunktion)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall I definierte reellwertige Funktion. Die differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

heißt Stammfunktion von f.
Stammfunktionen sind nur bis auf Konstanten festgelegt, d.h. mit F ist auch $F + C$ für $C \in \mathbb{R}$ Stammfunktion zu f.

Satz 2.37: (erster Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung)

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I stetig, dann ist die Funktion F, definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt, \qquad (x, a \in I),$$

eine Stammfunktion von f.

Satz 2.37: (zweiter Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung)

Ist F Stammfunktion einer auf einem Intervall I stetigen oder R-integrierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, so gilt für beliebige $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b .$$

Hauptsätze der Differential-und Integralrechnung

Buch Kap. 2.13

Stammfunktion

Ist $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$, so schreiben wir

$$\int f(t)\,dt = F(x) + C.$$

Hierbei heißt $C \in \mathbb{R}$ Integrationskonstante.

Stammfunktionen

Beispiele

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx &= -\cot(x) + C && \text{für } x \neq k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin(x) + C && \text{für } |x| < 1 \\
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C && \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C && \text{für } |x| > 1 \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x + C && \\
\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C && \text{für } |x| \neq 1. \\
\int e^{ax}\,dx &= \frac{1}{a}e^{ax} + C && \text{für } a \neq 0.
\end{aligned}
$$

Stammfunktionen

noch mehr Beispiele

$$\begin{aligned}
\int b^x\,dx &= \frac{1}{\log(b)}b^x + C \qquad \text{für } b>0, b\neq 1.\\
\int \log(x)\,dx &= x(\log(x)-1) + C \qquad \text{für } x>0.\\
\int \log_b(x)\,dx &= \frac{x}{\log(b)}(\log(x)-1) + C \qquad \text{für } b>0, x>0.\\
\int \sinh(x)\,dx &= \cosh(x) + C\\
\int \cosh(x)\,dx &= \sinh(x) + C\\
\int \tanh(x)\,dx &= \log(\cosh(x)) + C\\
\int \coth(x)\,dx &= \log(|\sinh(x)|) + C \qquad \text{für } x\neq 0.
\end{aligned}$$

Beispiel

Buch Kap. 2.13

Polynome

Substitutionsregel

Buch Kap. 2.13

Satz 2.29: (Substitutionsregel)

Sei f stetig auf dem Intervall J und φ stetig differenzierbar auf dem Intervall I, wobei $\varphi(I) \subset J$ gilt und die Umkehrfunktion φ^{-1} existiert. Dann gilt

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt \text{ mit } t = \varphi(x)$$

Substitutionsregel

Buch Kap. 2.13

Substitutionsregel 1

1) $\varphi(x)$ wird durch t ersetzt (substituiert),
2) wegen $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$ bzw. $dt = \varphi'(x)\,dx$ wird $\varphi'(x)\,dx$ durch dt ersetzt,
3) das Integral $\int f(t)\,dt$ wird berechnet (das sollte einfacher als die Berechnung des Integrals $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ sein, sonst wäre die Mühe umsonst!),
4) t wird durch $\varphi(x)$ ersetzt (Rücksubstitution).

Substitutionsregel

Buch Kap. 2.13

Beispiel

Substitutionsregel

Buch Kap. 2.13

Substitutionsregel 2

1) x wird durch $\varphi(t)$ ersetzt (substituiert),
2) wegen $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ bzw. $dx = \varphi'(t)\,dt$ wird dx durch $\varphi'(t)\,dt$ ersetzt,
3) das Integral $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ wird berechnet,
4) t wird durch $\varphi^{-1}(x)$ ersetzt (Rücksubstitution).

Substitutionsregel

Buch Kap. 2.13

Beispiel

Partielle Integration

Buch Kap. 2.13

Partielle Integration

Für zwei auf einem Intervall I stetig differenzierbare Funktionen u und v ist $u \cdot v$ eine Stammfunktion von $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ und es gilt

$$u(x)v(x) = \int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\, dx \quad \text{bzw. nach Satz 2.28}$$

$$\int u'(x)v(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x))\, dx.$$

Partielle Integration

Buch Kap. 2.13

Beispiel

Partielle Integration

Buch Kap. 2.13

Beispiel

Integration

Bemerkung

- Nicht jedes Integral lässt sich explizit "lösen", d.h.
- nicht jede (integrierbare) Funktion besitzt "einfache" Stammfunktion bzw.
- manche Stammfunktionen lassen sich nicht durch Komposition von elementaren Funktionen darstellen.

Beispiele

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Si}(x) &:= \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt && \text{(Integralsinus)}\\
\mathrm{erf}(x) &:= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt && \text{(Fehlerfunktion)}\\
\mathrm{E}(x,k) &:= \int_0^x (1-k^2\sin^2 t)^{\pm\frac{1}{2}}\,dt && \text{(Elliptische Integrale)}
\end{aligned}
$$

Integration rationaler Funktionen

Ziel: Integration rationaler Funktionen

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{wobei} \quad p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k.$$

Methode: Partialbruch-Zerlegung von rationaler Funktion $R(x)$.

Ansatz

$$\begin{aligned} R(x) &= p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\ &\quad + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1} x + \delta_{j1}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j} x + \delta_{jk_j}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^{k_j}} \right] \end{aligned}$$

Integration rationaler Funktionen

Erläuterungen

- Ohne Einschränkung: $p(x)$ und $q(x)$ haben keine gemeinsamen Nullstellen.
- Das Polynom $p_1(x)$ tritt nur auf, falls
$$\deg(p) \geq \deg(q).$$
- In diesem Fall berechnet man $p_1(x)$ mit Polynomdivision, und es gilt
$$\frac{p_2(x)}{q(x)} = R(x) - p_1(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad p(x) = p_1(x) \cdot q(x) + p_2(x),$$
mit $\deg(p_2) < \deg(q)$.
- Das Nennerpolynom $q(x)$ besitze
  - die reellen Nullstellen x_j mit Vielfachheit k_j;
  - die komplexen Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$ mit Vielfachheit k_j und damit komplex konjugierte Nullstellen $\bar{z}_j = a_j - ib_j$.

Integration rationaler Funktionen

Ansatz der Partialbruch-Zerlegung

$$
\begin{aligned}
R(x) \quad &= \quad p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\
&\quad + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^{k_j}} \right]
\end{aligned}
$$

Unbekannte Parameter, die bestimmt werden müssen:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{j\ell}, \qquad j = 1, \ldots, n_1,\ \ell = 1, \ldots, k_j; \\
&\gamma_{j\ell}, \qquad j = n_1 + 1, \ldots, n_2,\ \ell = 1, \ldots, k_j; \\
&\delta_{j\ell}, \qquad j = n_1 + 1, \ldots, n_2,\ \ell = 1, \ldots, k_j.
\end{aligned}
$$

Diese Parameter werden durch Koeffizientenvergleich berechnet, die rechte Seite wird dabei auf den Hauptnenner gebracht.

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Beispiel

$$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{x^2+1} \\ \Rightarrow \quad 1-x &= x(x^2+1)\alpha_1 + (x^2+1)\alpha_2 + x^2(\gamma_1 x + \delta_1) \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren: $1 - x = (\alpha_1 + \gamma_1)x^3 + (\alpha_2 + \delta_1)x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$

Koeffizientenvergleich: $\alpha_1 + \gamma_1 = 0,\ \alpha_2 + \delta_1 = 0,\ \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1$

Partialbruchzerlegung: $R(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}.$

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Beispiel

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Beispiel

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Vier Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

I: Polynome:

$$\int \sum_{k=0}^{s} c_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{s} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

II: Inverse Potenzen:

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^\ell} = \begin{cases} \log(|x-x_0|) + C & \text{für } \ell = 1 \\ \frac{1}{1-\ell} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{\ell-1}} + C & \text{für } \ell = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Vier Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

I: Polynome:

$$\int \sum_{k=0}^{s} c_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{s} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

II: Inverse Potenzen:

$$\int \frac{dx}{(x - x_0)^\ell} = \begin{cases} \log(|x - x_0|) + C & \text{für } \ell = 1 \\ \dfrac{1}{1-\ell} \cdot \dfrac{1}{(x - x_0)^{\ell - 1}} + C & \text{für } \ell = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Integration rationaler Funktionen

Beispiel

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Vier Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

III:

$$I_\ell := \int \frac{1}{(x^2+1)^\ell}\,dx \qquad \text{für } \ell \in \mathbb{N}$$

- Für $\ell = 1$ gilt

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x) + C$$

- Für $\ell > 1$ kann man I_ℓ wie folgt *rekursiv* berechnen.

$$I_\ell = \frac{1}{2(1-\ell)}\left[(3-2\ell)I_{\ell-1} - \frac{x}{(x^2+1)^{\ell-1}}\right] \qquad \text{für } \ell = 2, 3, \ldots.$$

Integration rationaler Funktionen

Herleitung der Rekursion.

- Substitution: Setze $u = x^2 + 1$ in

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{(x^2+1)^\ell}\,dx &= \int \frac{du}{u^\ell} = \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{u^{\ell-1}} + C\\ &= \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}} + C\end{aligned}$$

- Partielle Integration:

$$\begin{aligned}I_{\ell-1} &= \int \frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^\ell}\,dx = \int \frac{x}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^\ell}\,dx + I_\ell\\ &= \frac{x}{2(1-\ell)(x^2+1)^{\ell-1}} - \frac{1}{2(1-\ell)}\cdot I_{\ell-1} + I_\ell\end{aligned}$$

Somit:

$$I_\ell = \frac{1}{2(1-\ell)}\left[(3-2\ell)I_{\ell-1} - \frac{x}{(x^2+1)^{\ell-1}}\right] \qquad \text{für } \ell = 2,3,\ldots. \qquad \square$$

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Herleitung der Rekursion.

- Substitution: Setze $u = x^2 + 1$ in

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^\ell}\,dx = \int \frac{du}{u^\ell} = \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{u^{\ell-1}} + C = \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}} + C$$

- Partielle Integration:

$$I_{\ell-1} = \int \frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^\ell}\,dx = \int \frac{x}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^\ell}\,dx + I_\ell = \frac{x}{2(1-\ell)(x^2+1)^{\ell-1}} - \frac{1}{2(1-\ell)}\cdot I_{\ell-1} + I_\ell$$

Somit:

$$I_\ell = \frac{1}{2(1-\ell)}\left[(3-2\ell)I_{\ell-1} - \frac{x}{(x^2+1)^{\ell-1}}\right] \qquad \text{für } \ell = 2, 3, \ldots. \qquad \square$$

Integration rationaler Funktionen

Herleitung der Rekursion.

- Substitution: Setze $u = x^2 + 1$ in

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{(x^2+1)^\ell}\,dx &= \int \frac{du}{u^\ell} = \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{u^{\ell-1}} + C \\ &= \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}} + C \end{aligned}$$

- Partielle Integration:

$$\begin{aligned} I_{\ell-1} &= \int \frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^\ell}\,dx = \int \frac{x}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^\ell}\,dx + I_\ell \\ &= \frac{x}{2(1-\ell)(x^2+1)^{\ell-1}} - \frac{1}{2(1-\ell)}\cdot I_{\ell-1} + I_\ell \end{aligned}$$

Somit:

$$I_\ell = \frac{1}{2(1-\ell)}\left[(3-2\ell)I_{\ell-1} - \frac{x}{(x^2+1)^{\ell-1}}\right] \qquad \text{für } \ell = 2, 3, \ldots. \qquad \square$$

Integration rationaler Funktionen

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

IV:

$$\int \frac{cx+d}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx$$
$$=\frac{c}{2}\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx+(d+ca)\int \frac{dx}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

IV:

$$\int \frac{cx+d}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx$$
$$=\frac{c}{2}\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx+(d+ca)\int \frac{dx}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}$$

- Erstes Integral:

$$\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx = \int \frac{du}{u^\ell} \qquad \text{mit } u=(x-a)^2+b^2.$$
$$=\begin{cases} \log\left(\left|(x-a)^2+b^2\right|\right)+C & \text{für } \ell=1 \\ \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\ell-1}}+C & \text{für } \ell=2,3,\ldots \end{cases}$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

IV:

$$\int \frac{cx+d}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\ell}}\,dx$$
$$=\frac{c}{2}\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\ell}}\,dx+(d+ca)\int \frac{dx}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\ell}}$$

- Zweites Integral:

$$\int \frac{dx}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\ell}}=\frac{1}{b^{2\ell-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{\ell}} \qquad \text{mit} \qquad t=\frac{x-a}{b}.$$

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Beispiel

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Beispiel

Betrachten erneut die rationale Funktion

$$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

Somit bekommt man

$$\int R(x)\,dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} = -\log(|x|) - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \arctan(x) + C$$

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Beispiel

Partialbruchzerlegung mittels “Zuhaltemethode”

Annahme

Das Nennerpolynom hat nur einfache Nullstellen.

Beispiel

Partialbruchzerlegung mittels “Zuhaltemethode”

Beispiel

Integration rationaler Funktionen

Substitution bei verwandten Integralen.

Sei $R(x)$ eine rationale Funktion.
Dann lassen sich die folgenden Integrale durch Substitution vereinfachen.

- Setze $t = e^x$ in
$$\int R(e^x)\,dx = \int \frac{R(t)}{t}\,dt$$
- Mit $t = \tan(x/2)$ bekommt man
$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{und} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$
und somit durch Substitution in
$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Beispiel

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Beispiel

Uneigentliche Integrale

Buch Kap. 2.16

Definition 2.36: (uneigentliches Integral)

Die Funktion f sei auf dem rechts offenen Intervall $[a, b)$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, erklärt und auf jedem Intervall $[a, c]$, $c < b$, Riemann integrierbar. Wir setzen

$$\text{a)} \quad \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)\,dx, \ \text{falls } b < \infty,$$

und

$$\text{b)} \quad \int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,dx, \ \text{falls } b = \infty.$$

Integrale des Typs a) oder b) heißen uneigentliche Integrale. Wir sagen, dass ein uneigentliches Integral konvergiert, falls der entprechende Grenzwert exisitiert. Ansonsten sprechen wir von Divergenz.

Uneigentliche Integrale

Buch Kap. 2.16

Beispiel

Beispiel

Uneigentliche Integrale

Buch Kap. 2.16

Satz 2.41: (Cauchy Kriterium für uneigentliche Integrale)

Die Funktion $f(x)$ sei über jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a, b] \subset [a, \infty)$ Riemann integrierbar.
Das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

ist konvergent genau dann, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists X > a \; \forall X < x_1 < x_2 : \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| < \epsilon$$

Uneigentliche Integrale

Buch Kap. 2.16

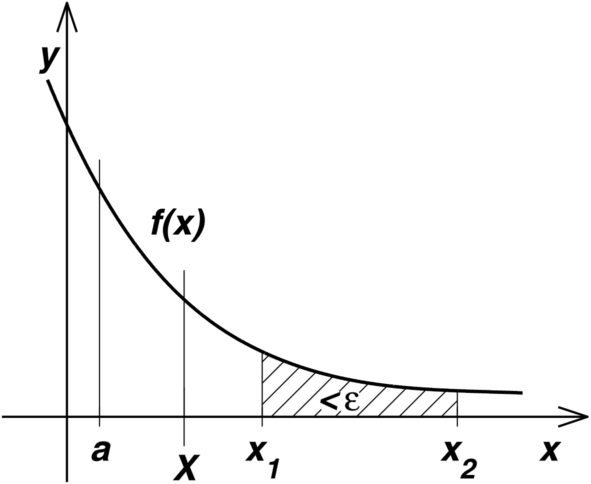


Abbildung 2.63: Zur Konvergenz uneigentlicher Integrale der Form $\int_a^\infty f(x)\,dx$

Uneigentliche Integrale

Buch Kap. 2.16

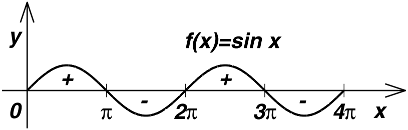


Abb. 2.64: Zum Integral $\int_0^\infty \sin x \, dx$,

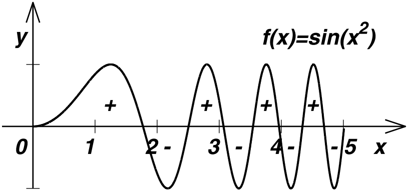


Abb. 2.65: Zum Fresnel Integral $\int_0^\infty \sin(x^2) \, dx$

Uneigentliche Integrale

Buch Kap. 2.16

Satz 2.42

Sei $f(x) \geq 0$ und monoton fallend.

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ konvergent} \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Satz 2.43: Majorantenkriterium

$f(x) \geq 0$ und $g(x) \geq f(x)$ auf $[a, \infty)$, dann:

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \text{ konvergent} \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ konvergiert}$$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ divergent} \Longrightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ divergiert}.$$

Uneigentliche Integrale

Beispiel

Uneigentliche Integrale

Buch Kap. 2.16

Satz 2.44

$\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergent $\Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent.

Satz 2.45

f sei über jedes beschränkte Teilintervall von $[a, \infty)$ $(a > 0)$ integrierbar, $c \geq a$ und $M > 0$.

a) $f(x) \leq \frac{M}{x^\alpha} \forall_{x \geq c}$ mit $\alpha > 1 \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent,

b) $f(x) \geq \frac{M}{x^\alpha} \forall_{x \geq c}$ mit $\alpha \leq 1 \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ divergent.

Uneigentliche Integrale

Beispiel

Integralkriterium für Reihen

Buch Kap. 3.1

Satz 3.12: (Integralkriterium für Reihen)

Ist f auf $[m, \infty)$ (m ganzzahlig) positiv und monoton fallend, so haben die Reihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$$

und das uneigentliche Integral

$$\int_m^{\infty} f(x) dx$$

gleiches Konvergenzverhalten.

Integralkriterium für Reihen

Buch Kap. 3.1

Beispiel

Integration bei Polen am Rand

Buch Kap. 2.16

Erinnerung

Die Funktion f sei auf dem rechts offenen Intervall $[a, b)$ erklärt und auf jedem Intervall $[a, c]$, $c < b$, Riemann integrierbar. Wir setzen

$$\text{a)} \quad \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)\,dx, \ \text{falls } b < \infty,$$

Analoges gilt bei Funktionen auf dem links offenen Intervall $(a, b]$.

Integration bei Polen am Rand

Beispiel

Uneigentliche Integration

Buch Kap. 2.16

Was ist...

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \ ?$$

Uneigentliche Integration

Buch Kap. 2.16

Was ist...

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \ ?$$

Uneigentliche Integration

Buch Kap. 2.16

Was ist...

$$\int_a^\infty f(x)dx,$$

wobei $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$?

Uneigentliche Integration

Buch Kap. 2.16

Was ist...

$$\int_a^b f(x)dx,$$

wobei $f : [a, b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$?

Parameterintegrale

Beispiele

- Gamma-Funktion (interpoliert die Fakultät)

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad x > 0,$$

- Bessel-Funktionen (Ausbreitung von Wellen, Schwingungsverhalten elastischer Körper)

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos\left(x \sin t - nt\right) dt, \quad n \in \mathbb{N},$$

- Laplace-transformierte einer Funktion f (gewöhnliche Differentialgleichungen überführen in algebraischer Gleichungen)

$$F(s) := \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt.$$

Die Gamma-Funktion

Parameterintegrale

Satz 2.39: (Differentiation bestimmter Parameterintegrale)

Seien $[a, b]$ und $[c, d]$ abgeschlossene Intervalle und die Funktion $f(x, y)$ in $[a, b] \times [c, d]$ sei stetig bezüglich des Parameters x und integrierbar bezüglich der Veränderlichen y. Dann gilt für das Parameterintegral

$$F(x) := \int_c^d f(x, y)\, dy, \quad a \leq x \leq b,$$

a) F ist in $[a, b]$ stetig,

b) ist f zusätzlich auf $[a, b]$ nach dem Parameter x stetig differenzierbar, dann ist F differenzierbar und hat die Ableitung

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d \frac{d\, f(x, y)}{d\, x}\, dy\ .$$

Parameterintegrale

Buch Kap. 2.15

Beispiel

Parameterintegrale

Buch Kap. 2.15

Satz 2.40: (Leibniz–Regel)

Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 2.39. Seien ferner $h(x)$ und $g(x)$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$= \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{d\, f(x, y)}{d\, x}\, dy + f(x, h(x))h'(x) - f(x, g(x))g'(x)\ .$$

Parameterintegrale

Buch Kap. 2.15

Beispiel

Anwendungen der Integralrechnung (Volumen und Mantelfläche von Rotationskörpern, Kurven und Bogenlänge, Kurvenintegrale)

Rotationskörper

Buch Kap. 2.14

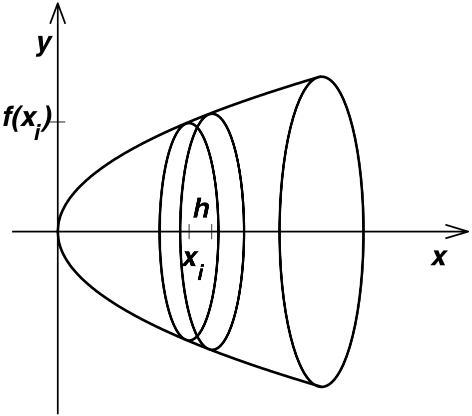


Abb. 2.61: Rotationskörper, durch $f(x)$ erzeugt

Rotationskörper

Buch Kap. 2.14

Volumen

Das Volumen des von der Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ erzeugten Rotationskörpers wird durch

$$V := \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

erklärt.

Rotationskörper

Buch Kap. 2.14

Mantelfläche

Die Oberfläche des von Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ erzeugten Rotationskörpers lässt sich durch

$$F := 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

berechnen.

Rotationskörper

Buch Kap. 2.14

Beispiel

Rotationskörper

Buch Kap. 2.14

Beispiel

Kurven im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 2.12

Definition 2.30 (vergl. Def. 5.13): (Kurve im $\mathbb{R}^n$)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall.
Jede Abbildung

$$\mathbf{x} : [a, b] \to G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ heißt Kurvenstück in G mit dem Anfangspunkt $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a), \dots, x_n(a))^T$, dem Endpunkt $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b), \dots, x_n(b))^T$ und der Spur $\{\mathbf{x}(t) \,|\, a \leq t \leq b\}$.

Fortsetzung Definition 2.30:

Ein Kurvenstück heißt regulär, falls $x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \ldots x_n'(t)^2 \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ gilt.

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$$

heißt Parameterdarstellung des Kurvenstückes mit dem Parameter t. Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken K_i, $i = 1, ..., r$, wobei der Anfangspunkt von K_i jeweils mit dem Endpunkt von K_{i-1}, $i = 2, ..., r$, übereinstimmt, heißt Kurve. Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es i. Allg. auch als Kurve bezeichnet. Dann schreiben wir (vergl. Def. 5.13)

$$\gamma(t) \equiv \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$$

Beispiel

Kurven im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 2.12

Beispiel

Kurven im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 5.3

Defintion 5.15: (Tangentenvektor)

Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve (d.h. $\|\dot{\gamma}(t)\| > 0$ für alle $t \in [t_a, t_e]$). Mit

$$T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \text{ für } t \in [t_a, t_e]$$

bezeichnen wir den Tangentenvektor an die Kurve γ.
Die Gleichung der Kurventangente in $\gamma(t_0)$ lautet

$$\mathbf{x}(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda T(t) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \; .$$

Skalare Kurvenintegrale

Buch Kap. 7.4

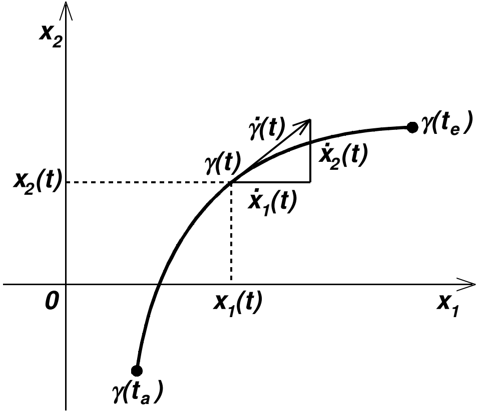


Abbildung 7.2: Bezeichnungen bei Kurven γ im $\mathbb{R}^2$

Kurven im $\mathbb{R}^n$

Beispiel

Skalare Kurvenintegrale

Buch Kap. 7.4

Defintion 7.6 (Bogenelement einer Kurve im $\mathbb{R}^n$)

Sei $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$, $t \in [t_a, t_e]$ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$. Dann bezeichnen wir mit

$$ds = \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \cdots + \dot{x}_n^2(t)}\, dt =: \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

das Bogenelement der Kurve (an der Stelle $\gamma(t)$).

Kurven im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 5.3

Definition 5.14: (Bogenlänge)

Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve.

$$s(t) := \int_{t_a}^{t} \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

bezeichnen wir als **Bogenlänge** des Kurvenstücks über $[t_a, t]$.

Beispiel

Kurven im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 2.12

Beispiel

Skalare Kurvenintegrale

Buch Kap. 7.4

Definition 7.7: (Skalares Kurvenintegral einer Funktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}$ sei auf allen Punkten einer Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt

$$\int_\gamma f\, ds := \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

skalares Kurvenintegral der Funktion f (bzw. Kurvenintegral erster Art).

Skalare Kurvenintegrale

Buch Kap. 7.4

Schritte zur Berechnung des skalaren Kurvenintegrals einer Funktion

1) Falls nicht gegeben, Parametrisierung der Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$
2) Berechnung der Funktionswerte $f(\gamma(t))$ der Belegungsfunktion
3) Berechnung von $\|\dot{\gamma}(t)\|$
4) Berechnung des Kurvenintegrals

$$\int_\gamma f \, ds = \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt.$$

Skalare Kurvenintegrale

Beispiel

Skalare Kurvenintegrale

Beispiel

Skalare Kurvenintegrale

Buch Kap. 7.4

Satz 7.1:(Rechenregeln für Kurvenintegrale und Mittelwertsatz)

Sei γ eine Kurve und $f, g : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Regeln

(i) $\int_\gamma (f+g) ds = \int_\gamma f\, ds + \int_\gamma g\, ds$ (Additivität des Integrals)

(ii) $\int_\gamma \alpha f\, ds = \alpha \int_\gamma f\, ds$ (Homogenität des Integrals)

(iii) $\int_\gamma f\, ds = f(\gamma(\tau)) \cdot L$ (Mittelwertsatz)

Dabei ist L die Länge der Kurve und $\gamma(\tau)$ ein geeigneter Kurvenpunkt.

Potenzreihen und elementare Funktionen

Gleichmäßige und punktweise Konvergenz

Buch Kap. 3

Definition

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, mit $f_n : D \to \mathbb{C}$ für $D \subset \mathbb{C}^m$, eine Funktionenfolge. Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

- punktweise gegen $f : D \to \mathbb{C}$, falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z), \qquad \text{für alle } z \in D.$$

- gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$, falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Definition

Wir schreiben bei einer beschränkten Funktion $f : D \to \mathbb{R}$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in D} |f(x)|.$$

Gleichmäßige und punktweise Konvergenz

Gleichmäßige Konvergenz

Gleichmäßige und punktweise Konvergenz

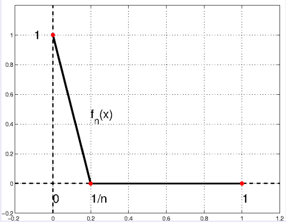
Bemerkung

Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Gegenbeispiel

Betrachte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{für } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0 & \text{für } 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$



Gleichmäßige und punktweise Konvergenz

Bemerkung

Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Gegenbeispiel

Die Folge konvergiert punktweise gegen die unstetige Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Allerdings konvergiert $(f_n)_n$ nicht gleichmäßig gegen f, denn es gilt

$$\|f_n - f\| = 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Gleichmäßige und punktweise Konvergenz

Satz

Falls eine Folge $(f_n)_n$ stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, gleichmäßig auf D gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert, so ist f stetig auf D.

Beweis

Satz (Majorantenkriterium von Weierstraß)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Funktionenfolge mit $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, und gelte

$$|f_n(z)| \leq b_n \text{ für alle } z \in D \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$$

für eine reelle Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dann ist die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \qquad \text{für } z \in D,$$

gleichmäßig und absolut konvergent auf D.

Folgerung

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge stetiger Funktionen mit $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, so dass

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \qquad \text{für } z \in D,$$

gleichmässig konvergiert auf D. Dann ist f stetig auf D.

Gleichmäßige und punktweise Konvergenz Buch Kap. 3

Beispiel

Vertauschbarkeit Differentiation und Summation

Satz

Sei $(f_n)_n$ eine Folge differenzierbarer Funktionen $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{und} \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x), \qquad \text{für } x \in (a, b),$$

gleichmäßig konvergent auf (a, b) sind. Dann ist die Funktion f differenzierbar auf (a, b), und es gilt $f' = g$, d.h.

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \qquad \text{für alle } x \in (a, b).$$

Vertauschbarkeit Differentiation und Summation

Beispiel

Vertauschbarkeit Differentiation und Summation

Beispiel

Vertauschbarkeit Differentiation und Summation

Beispiel

Potenzreihen

Buch Kap. 3

Definition

Eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

heißt (komplexe) Potenzreihe zum Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$.

Beispiel

Die (komplexe) Exponentialfunktion ist definiert durch die Potenzreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Weiterhin: Elementare Funktionen sind über Potenzreihen definiert:

$$\log(z), \cos(z), \sin(z), \ldots$$

Taylor-Reihenentwicklung

Buch Kap. 3

Betrachte für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$, die Taylor-Reihe

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad \text{mit } x_0, x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkungen

- Die Taylor-Reihe einer C^∞-Funktion ist im Allgemeinen nicht konvergent.
- Konvergiert die Taylor-Reihe $T(x)$, so nicht notwendigerweise gegen $f(x)$.
- Falls

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

  so nennt man die Funktion f reell-analytisch.

Taylor-Reihenentwicklung

Buch Kap. 3

Beispiele

Taylor-Reihenentwicklung

Buch Kap. 3

Beispiele

Taylor-Reihenentwicklung

Buch Kap. 3

Beispiele

Konvergenzradius einer Potenzreihe

Buch Kap. 3

Satz

Zu jeder Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

gibt es eine Zahl $r \geq 0$ mit den Eigenschaften

$$|z - z_0| < r \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{absolut konvergent}$$

$$|z - z_0| > r \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{divergent}$$

Die Zahl $r \geq 0$ heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.
Die Potenzreihe konvergiert für alle ρ mit $0 \leq \rho < r$ auf

$$\overline{K_\rho(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - z_0| \leq \rho\}$$

sogar gleichmäßig.

Konvergenzradius einer Potenzreihe

Buch Kap. 3

Satz (Die Formel von Cauchy-Hadamard)

Den Konvergenzradius $r \geq 0$ einer Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

kann man mit der Formel von Cauchy-Hadamard berechnen:

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Konvergenzradius einer Potenzreihe

Buch Kap. 3

Beispiel

Konvergenzradius einer Potenzreihe

Beispiel

Konvergenzradius einer Potenzreihe

Beispiel

Konvergenzradius einer Potenzreihe

Buch Kap. 3

Satz

Für eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ gelten folgende Aussagen.

(a) Falls einer der beiden Grenzwerte

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \quad \text{oder} \quad r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

existiert (oder falls $r = \infty$), so stimmt dieser Grenzwert mit dem Konvergenzradius der Potenzreihe überein.

(b) Differenziert man die Potenzreihe, so erhält man wiederum eine Potenzreihe,

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z-z_0)^{k-1},$$

deren Konvergenzradius mit dem Konvergenzradius r der Ausgangsreihe übereinstimmt, auch im Fall $r = 0$ oder $r = \infty$.

Konvergenzradius einer Potenzreihe

Beispiel

Beispiele

Aus der Differentiation der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ergibt sich:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots \qquad \text{für } |z| < 1$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} = \frac{1}{2}\Big(2 + 6z + 12z^2 + \dots\Big) \text{ für } |z| < 1$$

Bemerkung

Die integrierte Potenzreihe

$$C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z - z_0)^{k+1}$$

besitzt den gleichen Konvergenzradius wie die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Beispiel

Integration der Potenzreihe

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \qquad \text{für } |z| < 1.$$

liefert eine Potenzreihenentwicklung der Logarithmusfunktion

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad \text{für } -1 < x < 1.$$

Weitere Anwendung

Integration der Potenzreihe

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} \qquad \text{für } -1 < x < 1$$

liefert Potenzreihenentwicklung

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} \qquad \text{für } -1 < x < 1.$$

Potenzreihen

Bemerkungen

- Eine Potenzreihe ist innerhalb ihres Konvergenzkreises $K_r(z_0)$ stetig.
- Reelle Potenzreihen sind C^∞-Funktionen auf $(x_0 - r, x_0 + r)$.
- Eine reelle Potenzreihe stimmt mit einer Taylor-Reihe überein:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad \text{für } |x - x_0| < r$$

Identitätssatz und Abelscher Grenzwertsatz Buch Kap. 3

Identitätssatz und Abelscher Grenzwertsatz

- Identitätssatz für Potenzreihen: Sind

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$$

  reelle Potenzreihen, die in einem Intervall $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ die gleiche Funktion darstellen, so gilt

$$a_k = b_k \qquad \text{für alle } k \geq 0.$$

- Abelscher Grenzwertsatz: Reelle Potenzreihen der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

  sind überall dort stetig, wo sie konvergieren, insbesondere in den Randpunkten ihres Konvergenzintervalls.

Identitätssatz und Abelscher Grenzwertsatz Buch Kap. 3

Beispiel

Die Reihe

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad \text{für } -1 < x < 1$$

konvergiert auch für $x = +1$. Somit ist nach dem Abelschen Grenzwertsatz insbesondere die Gleichung

$$\log(1+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} 1^{k+1}$$

gültig. Daraus folgt die Darstellung

$$\log(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Rechenregeln für Potenzreihen

Satz

Seien

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1 > 0$ und $r_2 > 0$. Dann gilt:

(a)
$$f(z) + g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k, \qquad \text{für } |z| < \min(r_1, r_2);$$

(b)
$$\lambda \cdot f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k z^k, \qquad \text{für } |z| < r_1 \text{ und mit } \lambda \in \mathbb{C};$$

(c) Cauchy-Produkt für Potenzreihen

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell} \right) z^k, \qquad \text{für } |z| < \min(r_1, r_2).$$

Rechenregeln für Potenzreihen

Buch Kap. 3

Beispiele

Rechenregeln für Potenzreihen

Buch Kap. 3

Beispiele

Sinus und Kosinus

Definition

$\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Satz:

Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{1}{2i} \cdot (\exp(iz) - \exp(-iz)), \\ \cos(z) &= \frac{1}{2} \cdot (\exp(iz) + \exp(-iz)). \end{aligned}$$

Daher gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Eulersche Formel:

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x), \quad \cos(x) = \mathrm{Re}(\exp(ix)), \quad \sin(x) = \mathrm{Im}(\exp(ix)).$$

Sinus und Kosinus

Warum?

Sinus und Kosinus

Warum?

Sinus und Kosinus

$\sin^2 + \cos^2$

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Was ist π?

Satz + Definition

Die Funktion $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend auf $[0, 2]$ mit $\cos(0) = 1 > 0$ und $\cos(2) < 0$. Daher hat cos eine Nullstelle zwischen 0 und 2. Diese nennen wir $\pi/2$.
Weiter ist $\sin = -\cos'$ nichtnegativ auf $[0, 2]$. Daher gibt es genau eine die Nullstelle zwischen 0 und 2.

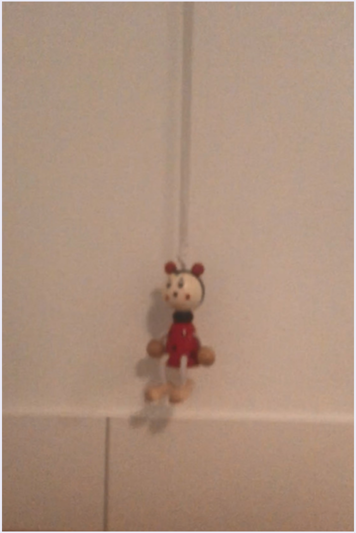
Folgerungen

Sinus und Kosinus

Buch Kap. 3

Zusammenhang zu hyperbolischen Funktionen

... ein bisschen Mechanik



Sinus und Kosinus

... ein bisschen Mechanik

Sinus und Kosinus

... ein bisschen Mechanik

Sinus und Kosinus

... ein bisschen Mechanik

Sinus und Kosinus

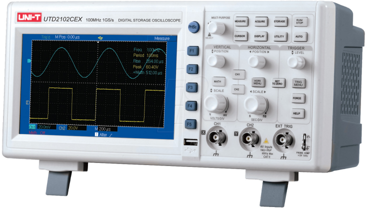
... ein bisschen Strom

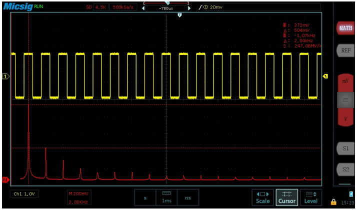
... ein bisschen Strom

Periodische Funktionen und Fourier-Reihen

FOURIER-Reihen

Buch Kap. 3.9





FOURIER-Reihen

Definition 3.17:(periodische Funktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche

$$f(x + T) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, heißt periodisch mit Periode $T > 0$. Das kleinste solche T, heißt die **Minimalperiode** oder auch primitive Periode von f.

Bemerkung

Ist f T–periodisch und integrierbar (über endlichen Intervallen), so gilt

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_a^{a+T} f(t)\,dt$$

für beliebige $a \in \mathbb{R}$.

Fourier-Reihen

Buch Kap. 3.9

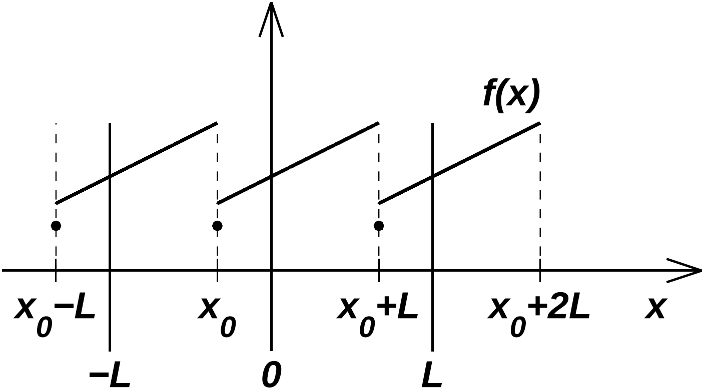


Abbildung 3.20: L-periodische Funktion mit Periodizitätsintervallen $[x_0 + kT, x_0 + (k+1)T),\ x_0 \in \mathbb{R}$

FOURIER-Reihen

Buch Kap. 3.9

Ziel

Entwicklung einer periodischen Funktion f in eine Fourier-Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

Grundschwingungen: $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$

Oberschwingungen: $\cos(k\omega t)$, $\sin(k\omega t)$, $k = 2, 3, \ldots$

FOURIER-Reihen

Bemerkungen

- Eine Reihe der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \qquad \text{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}\text{)}$$

heisst Fourier-Reihe. Dabei sei

$$\omega = \frac{2\pi}{T} > 0.$$

- Die zugehörigen Partialsummen

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \qquad \text{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}\text{)}$$

der Fourier-Reihe $f(t)$ heißen trigonometrische Polynome vom Grad n.

Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe

- Es gilt

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \quad \text{und} \quad \sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

- Damit gilt für die trigonometrischen Polynome

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k}{2}\left(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}\right) + \frac{b_k}{2i}\left(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}\right)\right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t}\right] \end{aligned}$$

FOURIER-Reihen

Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe

- Somit kann man die trigonometrischen Polynome schreiben als

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

  mit den Koeffizienten

$$\gamma_0 = \tfrac{1}{2} a_0, \qquad \gamma_k = \tfrac{1}{2}(a_k - ib_k), \qquad \gamma_{-k} = \tfrac{1}{2}(a_k + ib_k),$$

  womit gilt $a_0 = 2\gamma_0, \qquad a_k = \gamma_k + \gamma_{-k}, \qquad b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k})$.

- Für die Darstellung der Fourier-Reihe bekommt man somit

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

FOURIER-Reihen

Buch Kap. 3.9

Wichtigste Fragen

- Wie komme ich an die Koeffizienten ran?
- (Wann) konvergiert die Fourier-Reihe (punktweise oder gleichmäßig)?

Orthonormalität der Basisfunktionen

Buch Kap. 3.9

Satz

Die Funktionen $e^{ik\omega t}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\omega = 2\pi/T$, bilden ein Orthonormalsystem bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle u, v \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T \overline{u(t)} v(t)\, dt.$$

Beweis

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Satz

Konvergiert die Fourier-Reihe

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

auf $[0, T]$ gleichmäßig gegen eine Funktion f, so ist f stetig und es gilt:

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t}\, dt \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Fourier-Koeffizienten in $\mathbb{R}$

$$\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \quad k \neq \ell \\ T/2 & : \quad k = \ell \neq 0 \\ T & : \quad k = \ell = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(\ell\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \quad k \neq \ell \\ T/2 & : \quad k = \ell \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \text{für } k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt \quad \text{für } k > 0$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Fourier-Koeffizienten in $\mathbb{R}$

$$\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \quad k \neq \ell \\ T/2 & : \quad k = \ell \neq 0 \\ T & : \quad k = \ell = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(\ell\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \quad k \neq \ell \\ T/2 & : \quad k = \ell \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \text{für } k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt \quad \text{für } k > 0$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Definition

Für eine integrierbare Funktion $f : [0, T] \to \mathbb{C}$ werden die Fourier-Koeffizienten von $f(t)$ definiert durch

$$\gamma_k := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t}\, dt \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

Dabei ist $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz.

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Bemerkung

Mit den (komplexen) Fourier-Koeffizienten γ_k bekommt man die (reellen) Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_k &:= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \qquad \text{für } k \geq 0 \\ b_k &:= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt \qquad \text{für } k > 0 \end{aligned}$$

Definition

Die mit den Fourier-Koeffizienten gebildete Reihe

$$F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

heißt die Fourier-Reihe von $f(t)$.

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Beispiel

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Beispiel

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Beispiel

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Eigenschaften der Fourier-Koeffizienten

Wenn

- $f(t) = f(-t)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, dann gilt $b_k = 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ (gerade)
- $-f(t) = f(-t)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, dann gilt $a_k = 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ (ungerade)
- $f(t) = -f(t + T/2)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, dann gilt
  $a_k = b_k = 0\ \forall\, k \in \{0, 2, 4, 6, ...\}$ (Halbwellensymmetrie)

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Beispiel

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Beispiel

Fourier-Koeffizienten

Beispiel

Definition 3.19 (stückweise glatte Funktion)

Eine auf einem Intervall I definierte Funktion f heißt **stückweise glatt**, wenn gilt:

a) f ist stetig differenzierbar, ausgenommen auf einer Menge von Punkten, die sich in I nirgends häufen.

b) In diesen Ausnahmepunkten t_i existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte $f(t_i + 0)$ und $f(t_i - 0)$ sowie $f'(t_i + 0)$ und $f'(t_i - 0)$.

c) In allen Punkten t_i ist der Funktionswert $f(t_i)$ das arithmetische Mittel der einseitigen Grenzwerte

$$f(t_i) = \frac{1}{2}(f(t_i + 0) + f(t_i - 0)) \ .$$

Fourier-Reihen

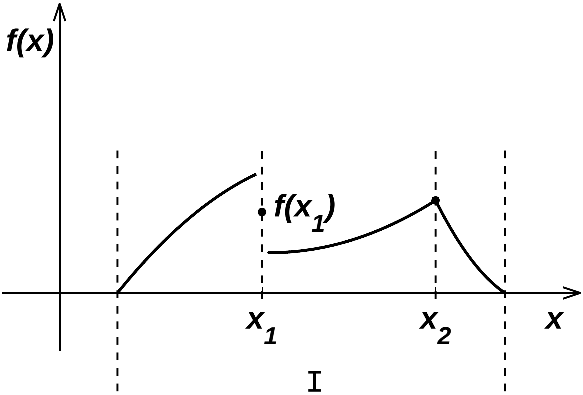


Abbildung 3.21: Stückweise glatte Funktion

Konvergenz von Fourier-Reihen

Satz 3.29: (Konvergenz von FOURIER-Reihen)

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T-periodische, stückweise glatte Funktion (s. Def. 3.19 und Abb. 3.21), so konvergiert ihre FOURIER-Reihe

- punktweise gegen f.
- In jedem abgeschlossenen Intervall ohne Unstetigkeitsstellen von f ist die Konvergenz gleichmäßig.
- An Unstetigkeitsstellen konvergiert die Fourierreihe gegen das arithmetische Mittel aus links- und rechtsseitigen Grenzwert.

Fourier-Koeffizienten

Beispiel

Fourier-Koeffizienten

Beispiel

Fourier-Koeffizienten

Beispiel

Konvergenz von Fourier-Reihen

Definition

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann heißt f quadratisch integrierbar auf I, wenn das Integral

$$\int_a^b |f(\tau)|^2 d\tau$$

existiert und konvergiert.

Satz 3.30: (BESSELsche Ungleichung)

Für alle T-periodischen und auf $[0, T]$ quadratisch integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Besselsche Ungleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{2}{T} \int_0^T f^2(t)\, dt \,.$$

Dabei sind a_k, b_k die FOURIER-Koeffizienten von f.
Für $n \to \infty$ ergibt sich für quadratisch integrierbare Funktionen sogar die Parseval'sche Gleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{2}{T} \int_0^T f^2(t)\, dt \,.$$

Konvergenz von Fourier-Reihen

Buch Kap. 3.9

Satz 3.31: (punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

Ist f eine stetige, stückweise glatte Funktion der Periode T, so konvergiert ihre FOURIER-Reihe gleichmäßig und absolut gegen f. Für ihre FOURIER-Koeffizienten a_k, b_k folgt außerdem die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \,.$$

Konvergenz von Fourier-Reihen

Satz 3.33: (Approximation im quadratischen Mittel)

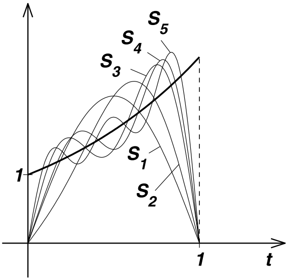
Sei $m \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Der quadratische Fehler der Approximation einer beschränkten, T-periodischen Funktion f durch ein trigonometrisches Polynom der Form s_m in der L_2-Norm, d.h.

$$||f - s_m||_2^2 := \frac{1}{T} \int_0^T (f(t) - s_m(t))^2 \, dt \ ,$$

wird genau dann minimal, wenn die Koeffizienten a_0 und $a_k, b_k, \ k = 1, 2, \ldots$ gerade die FOURIER-Koeffizienten der Funktion f sind. Für den Fehler gilt

$$||f - s_m||_2^2 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 \, dt - (\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k^2 + b_k^2)) \ .$$

Konvergenz von Fourier-Reihen



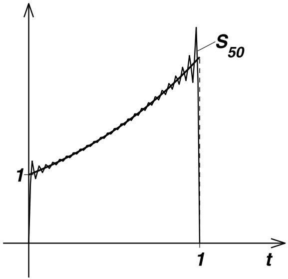


Abbildung 3.28-3.29: Approximation von e^t auf $[0, 1]$ durch trigonometrische Polynome bis zum Grade 5 (links) und mit Grad 50 (rechts)

Konvergenz von Fourier-Reihen

Buch Kap. 3.9

Satz 3.34: (gliedweise Integration einer FOURIER-Reihe)

Eine punktweise konvergente FOURIER-Reihe kann man gliedweise integrieren und es gilt

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau = \frac{a_0}{2}t + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a_k}{k\omega}\sin(k\omega t) - \frac{b_k}{k\omega}\cos(k\omega t)\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k\omega}\,.$$

Satz 3.34: (gliedweise Integration einer FOURIER-Reihe)

Konvergenz von Fourier-Reihen

Satz 3.35: (gliedweise Differentiation einer FOURIER-Reihe)

Eine punktweise konvergente FOURIER-Reihe kann man im Allgemeinen nicht gliedweise differenzieren. Eine gliedweise Differentiation ist nur möglich, wenn die Ableitungsreihe konvergent ist. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} -a_k k\omega \sin(k\omega t) + b_k k\omega \cos(k\omega t).$$

Satz 3.35: (gliedweise Differentiation einer FOURIER-Reihe)

Fourier-Reihen

Buch Kap. 3.9

Beispiel

Fourier-Reihen

Beispiel

Fourier-Reihen

Buch Kap. 3.9

Beispiel

Fourier-Reihen

Beispiel

Interpolation

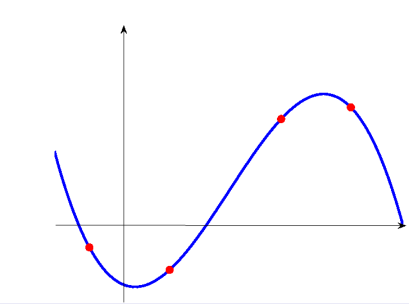
Interpolation

Problemstellung

Gegeben: Diskrete Werte einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an $n+1$ Stützstellen

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n.$$

Eingabedaten: $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \cdots, (x_n, f_n)$.



Gegebene Daten (x_j, f_j)**.**

Interpolation

Buch Kap. 2.17

Problemstellung

Gesucht: *Simple* Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Daten interpoliert, d.h.

$$p(x_i) = f_i \qquad \text{für alle } i = 0, 1, \ldots, n,$$

z.B.: p Polynom, trigonometrisches Polynom, rationale Funktion.

Fragen

- Gibt es so ein p? Falls ja, ist p eindeutig?
- Wie sieht die Lösung p aus und wie berechnet man p?

Interpolation

Buch Kap. 2.17

Klassische Polynom-Interpolation

Bestimme ein Polynom (höchstens) n-ten Grades

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

das die gegebenen Daten interpoliert, so dass $p_n(x_i) = f_i$, $0 \leq i \leq n$.

Erster Lösungsansatz:

Die Interpolationsbedingungen ergeben lineares System

$$\begin{array}{rcl} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n & = & f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n & = & f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n & = & f_n \end{array}$$

Interpolation

Klassische Polynom-Interpolation (Beispiel)

Klassische Polynom-Interpolation (Beispiel)

Interpolation

Buch Kap. 2.17

Klassische Polynom-Interpolation

Die Koeffizientenmatrix des linearen Systems

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},$$

kurz $V \cdot a = f$, heißt Vandermonde-Matrix.

Satz

Für die Determinante der Vandermonde-Matrix $V \equiv V(x_0, \dots, x_n)$ gilt

$$\det(V) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Existenz und Eindeutigkeit der Polynom-Interpolation

Folgerung

Falls Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschieden, so ist V eine invertierbare Matrix.

Satz

Zu paarweise verschiedenen Stützstellen

$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$$

und Funktionswerten

$$f_0, f_1 \ldots, f_n \in \mathbb{R}$$

gibt es genau ein interpolierendes Polynom p_n vom Höchstgrad n mit

$$p_n(x_i) = f_i \qquad \text{für alle } 0 \leq i \leq n.$$

Interpolation

Buch Kap. 2.17

Klassische Polynom-Interpolation (Beispiel)

Lagrange-Darstellung

Definiere Lagrange-Polynome

$$L_j(x) := \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{j-1})\cdot(x-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_j-x_{j-1})\cdot(x_j-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x_j-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i} \quad \text{für } 0\le j\le n.$$

Dann ist L_j ein Polynom vom Grad n, und es gilt

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i\neq j \end{cases} \qquad \text{für } 0\le i,j\le n.$$

Interpolation

Buch Kap. 2.17

Lösung mit der Lagrange-Darstellung

Die Interpolationsaufgabe

$$p_n(x_i) = f_i \qquad \text{für alle } 0 \leq i \leq n$$

wird gelöst durch das (eindeutige) Polynom

$$p_n(x) = f_0 L_0(x) + \ldots + f_n L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x).$$

Die obige Darstellung von p_n heißt Lagrange-Darstellung.

Lagrange-Darstellung (Beispiel)

Interpolation

Buch Kap. 2.17

Lagrange-Darstellung (Beispiel)

Interpolation

Lagrange-Darstellung (Beispiel)