Fourier-Reihen

Definition 3.19 (stückweise glatte Funktion)

Eine auf einem Intervall I definierte Funktion f heißt **stückweise glatt**, wenn gilt:

a) f ist stetig differenzierbar, ausgenommen auf einer Menge von Punkten, die sich in I nirgends häufen.

b) In diesen Ausnahmepunkten t_i existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte $f(t_i + 0)$ und $f(t_i - 0)$ sowie $f'(t_i + 0)$ und $f'(t_i - 0)$.

c) In allen Punkten t_i ist der Funktionswert $f(t_i)$ das arithmetische Mittel der einseitigen Grenzwerte

$$f(t_i) = \frac{1}{2}(f(t_i + 0) + f(t_i - 0)) \; .$$

Fourier-Reihen

Buch Kap. 3.9

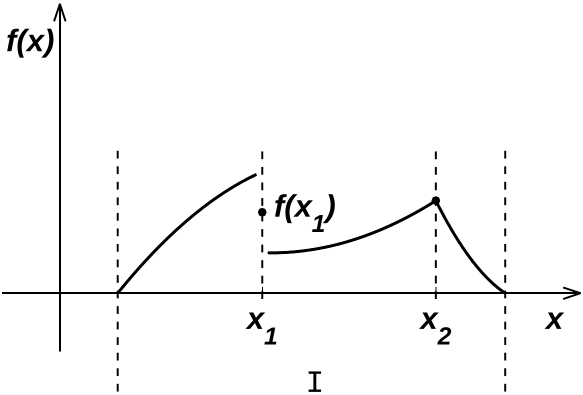


Abbildung 3.21: Stückweise glatte Funktion

Konvergenz von Fourier-Reihen

Satz 3.29: (Konvergenz von FOURIER-Reihen)

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine T-periodische, stückweise glatte Funktion (s. Def. 3.19 und Abb. 3.21), so konvergiert ihre FOURIER-Reihe

- punktweise gegen f.
- In jedem abgeschlossenen Intervall ohne Unstetigkeitsstellen von f ist die Konvergenz gleichmäßig.
- An Unstetigkeitsstellen konvergiert die Fourierreihe gegen das arithmetische Mittel aus links- und rechtsseitigen Grenzwert.

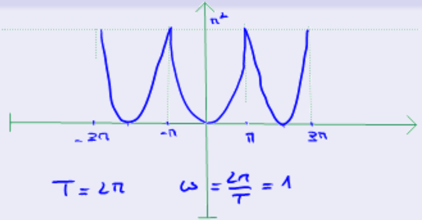
Fourier-Koeffizienten

Beispiel

$f(t) = t^2 \qquad t \in [-\pi, \pi]$

2π-periodisch

$b_k = 0$ da f gerade



$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t)\, dt \qquad T = 2\pi \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$= \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} \underset{u}{t^2} \underset{v'}{\cos(kt)}\, dt = \frac{2}{\pi} \underbrace{\left[t^2 \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^{\pi}}_{0} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2t \frac{\sin(kt)}{k}\, dt$$

$\sin(k\pi) = \sin(0) = 0$

$$= \frac{-4}{k\pi} \int_0^{\pi} t \sin(kt)\, dt = -\frac{4}{k\pi} \left[t \frac{-\cos(kt)}{k} \right]_0^{\pi} + \frac{4}{k\pi} \int_0^{\pi} \frac{-\cos(kt)}{k}\, dt$$

$$= +\frac{4}{k^2\pi} [\pi \cos(k\pi) - 0] - \frac{4}{k^2\pi} \underbrace{\left[\frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^{\pi}}_{0} = \frac{4}{k^2} \cos(k\pi) = \frac{4}{k^2} (-1)^k$$

Beispiel

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\,dt = \frac{2}{\pi}\frac{t^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos(kt)$$

f stetig

$$F_f(t) = \underbrace{f(t)}_{\text{auf } [-\pi,\pi]} = t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kt)$$

$$t = 0: \quad 0^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} \implies \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{-\pi^2}{3\cdot 4} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$t = \pi: \quad \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} \implies \pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k}}{k^2}$$

$$\implies \frac{2\pi^2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \implies \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Fourier-Koeffizienten

$f_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$ Buch Kap. 3.9

~~Beispiel~~

$$\|f - f_n\|_2^2 = \langle f-f_n, f-f_n\rangle = \frac{2}{T} = \frac{2}{T}\int_0^T (f(t) - f_n(t))^2\, dt$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^T (f(t))^2 - 2 f(t) f_n(t) + (f_n(t))^2\, dt\right) \quad *$$

$$\int_0^T f(t) f_n(t)\, dt = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_0^T f(t)dt}_{\frac{T}{2}a_0} + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \underbrace{\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)dt}_{\frac{T}{2}\cdot a_k} + \sum_{k=1}^n b_k \underbrace{\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt}_{\frac{T}{2}\cdot b_k}$$

$$= \frac{T}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)\right) =: A_n$$

$$\int_0^T f_n(t)\cdot f_n(t)\, dt = \int_0^T \left(\frac{a_0}{2} + \underbrace{\sum_1^n a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)}_{\text{orthogonal}}\right)\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k\cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right)$$

$$= \frac{a_0^2}{4}\underbrace{\int_0^T 1\, dt}_{T} + \sum_{k=1}^n a_k^2 \underbrace{\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(k\omega t)dt}_{T/2} + b_k^2 \underbrace{\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(k\omega t)\, dt}_{T/2}$$

$$= \frac{a_0^2}{2}\cdot\frac{T}{2} + \frac{T}{2}\sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 = A_n$$

Einsetzen der Ergebnisse in $*$ $\to$

$$0 \leq \underline{\|f-f_n\|_2^2} = \frac{2}{T}\int_0^T (f(t))^2\,dt - \frac{2}{T}\cdot 2A_n + \frac{2}{T}A_n = \underline{\frac{2}{T}\int_0^T (f(t))^2\,dt - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2\right)}$$

$$B_n := \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{2}{T}\int_0^T (f(t))^2\,dt$$

Bessel'sche Ungleichung

s. Satz 3.30

monoton steigend, beschränkt

$$: \quad \|f-f_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \iff \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^\infty a_k^2 + b_k^2 = \frac{2}{T}\int_0^T (f(t))^2\,dt$$

Parseval'sche Gleichung

s. Satz 3.30

Macht alles nur Sinn wenn f^2 integrierbar

$\downarrow$

Konvergenz von Fourier-Reihen

Buch Kap. 3.9

Definition

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann heißt f quadratisch integrierbar auf I, wenn das Integral

$$\int_a^b |f(\tau)|^2 d\tau$$

existiert und konvergiert.

Konvergenz von Fourier-Reihen

Buch Kap. 3.9

Satz 3.30: (BESSELsche Ungleichung)

Für alle T-periodischen und auf $[0, T]$ quadratisch integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Besselsche Ungleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{2}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt\ .$$

Dabei sind a_k, b_k die FOURIER-Koeffizienten von f.
Für $n \to \infty$ ergibt sich für quadratisch integrierbare Funktionen sogar die Parseval'sche Gleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{2}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt\ .$$

Konvergenz von Fourier-Reihen

Satz 3.31: (punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

Ist f eine stetige, stückweise glatte Funktion der Periode T, so konvergiert ihre FOURIER-Reihe gleichmäßig und absolut gegen f. Für ihre FOURIER-Koeffizienten a_k, b_k folgt außerdem die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \,.$$

$T_m = U_m = \left\{ s_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; s_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right\}$ Unterraum mit Skalarprodukt

Orthonormalbasis $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(k\omega t), \sin(k\omega t) \quad k = 1, \dots, n \right\}$ vgl. Übung, HÜ

Beste Approximation für f aus U_m bzgl. $\| \, \|_2$: Projektion von f auf U_m

Koeffizienten von $P(f)$ = Länge der Projektion von f auf Basiselemente: $<f, \text{Basiselement}>$

$$P(f) = \left< f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right> \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\left< f, \cos(k\omega t) \right>}_{a_k} \cos(k\omega t) + \underbrace{\left< f, \sin(k\omega t) \right>}_{b_k} \sin(k\omega t)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} < f, 1 > \frac{1}{\sqrt{2}}}_{\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{2}{T} \int f(t)\, dt}_{a_0}} + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

Konvergenz von Fourier-Reihen

Buch Kap. 3.9

Satz 3.33: (Approximation im quadratischen Mittel)

Sei $m \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Der quadratische Fehler der Approximation einer beschränkten, T-periodischen Funktion f durch ein trigonometrisches Polynom der Form s_m in der L_2-Norm, d.h.

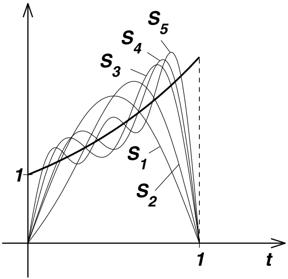
$s_m = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{m} b_k \sin(k\omega t)$

$$||f - s_m||_2^2 := \frac{1}{T}\int_0^T (f(t) - s_m(t))^2 \, dt \, ,$$

wird genau dann minimal, wenn die Koeffizienten a_0 und $a_k, b_k, \; k = 1, 2, \ldots$ gerade die FOURIER-Koeffizienten der Funktion f sind. Für den Fehler gilt

$$||f - s_m||_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 \, dt - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k^2 + b_k^2)\right) .$$

Konvergenz von Fourier-Reihen



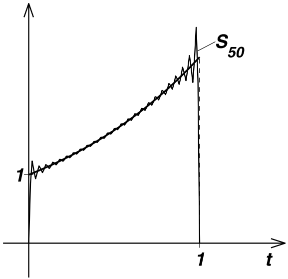


Abbildung 3.28-3.29: Approximation von e^t auf $[0, 1]$ durch trigonometrische Polynome bis zum Grade 5 (links) und mit Grad 50 (rechts)

Konvergenz von Fourier-Reihen

Satz 3.34: (gliedweise Integration einer FOURIER-Reihe)

Eine punktweise konvergente FOURIER-Reihe kann man gliedweise integrieren und es gilt

Dies ist so keine Fourier-Reihe!

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau = \frac{a_0}{2}t + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a_k}{k\omega}\sin(k\omega t) - \frac{b_k}{k\omega}\cos(k\omega t)\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k\omega}\,.$$

Also nicht zu verwechseln mit der F.R. der Stammfunktion von f!

$$\int_0^t F_f(\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t a_k\cos(k\omega\tau)\,d\tau + \int_0^t b_k\sin(k\omega\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{a_0}{2}t + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\frac{\sin(k\omega t)}{k\omega} - \frac{b_k\cos(k\omega t)}{k\omega} + \frac{b_k}{k\omega}\cos(0)$$

$$= \frac{a_0}{2}t + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a_k}{k\omega}\sin(k\omega t) - \frac{b_k}{k\omega}\cos(k\omega t)\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k\omega}$$

Konvergenz von Fourier-Reihen

Buch Kap. 3.9

Satz 3.34: (gliedweise Integration einer FOURIER-Reihe)

Für $a_0 \neq 0$ ist dies keine Fourier-Reihe wegen $\frac{a_0}{2} t^1$!

Nur dann = F.R. der Stammfkt wenn $a_0 = 0$

$$F(\tau) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau \xrightarrow{F.R.} F_F(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

$k \in \mathbb{N}$

$$\tilde{a}_k = \frac{2}{T} \int_0^T \underset{u}{F(\tau)} \underset{\dot v}{\cos(k\omega\tau)}\, d\tau$$

$$= \frac{2}{T} \underbrace{\left[F(\tau) \frac{\sin(k\omega\tau)}{k\omega} \right]_0^T}_{0} - \frac{2}{T} \int f(\tau) \frac{\sin(k\omega\tau)}{k\omega}\, d\tau$$

$$= -\frac{1}{k\omega} b_k \quad \text{wie oben}$$

Analog $\tilde{b}_k = \frac{2}{T} \left[F(\tau) \frac{-\cos(k\omega\tau)}{k\omega} \right]_0^T - \frac{2}{T} \int_0^T f(\tau) \frac{-\cos(k\omega t)}{k\omega}\, d\tau = -\frac{1}{k\omega} \cdot \frac{2}{T} F(T) + \frac{1}{k\omega} a_k$

$$\tilde{b}_k = \frac{2}{T} \left[F(\tau) \frac{-\cos(k\omega\tau)}{k\omega} \right] - \frac{2}{T} \int f(\tau) \frac{-\cos(k\omega\tau)}{k\omega}\, d\tau = \frac{1}{k\omega} \cdot \frac{2}{T} \underset{0 \text{ wenn } a_0 = 0}{F(T)} + \underbrace{\frac{1}{k\omega} a_k}_{\text{wie oben}}$$

Noch nachrechnen: $\tilde{a}_0 = 2 \sum b_k / k\omega$ wenn $a_0 = 0$

Konvergenz von Fourier-Reihen

Buch Kap. 3.9

Satz 3.35: (gliedweise Differentiation einer FOURIER-Reihe)

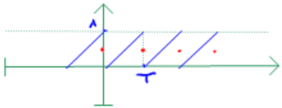
Eine punktweise konvergente FOURIER-Reihe kann man im Allgemeinen nicht gliedweise differenzieren. Eine gliedweise Differentiation ist nur möglich, wenn die Ableitungsreihe konvergent ist. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} -a_k k\omega \sin(k\omega t) + b_k k\omega \cos(k\omega t).$$

$k \to \infty$!

Bsp. Seite 170 - 172 gerechnet für $f(t) = \frac{A}{T} \cdot t \quad t \in [0,T)$ periodisch fortgesetzt

$a_0 = A \qquad \underbrace{a_k = 0 \qquad b_k = -\frac{A}{k\pi}}_{k \in \mathbb{N}}$



$$F f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{A}{k\pi} \sin(k\omega t) = g(t)$$

$$\dot{g}(t) = 0 - \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cancel{k}} \cancel{k}\omega \cos(k\omega t)$$

Konvergenz von Fourier-Reihen

Buch Kap. 3.9

Satz 3.35: (gliedweise Differentiation einer FOURIER-Reihe)

$$\dot{g}(t) = -\frac{A\omega}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right)$$

$t = 0$ $$\dot{g}(0) = -\frac{A\omega}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} 1 \quad \lightning$$ keine Konvergenz

$t = \frac{T}{2}$ $$\dot{g}\left(\frac{T}{2}\right) = -\frac{A\omega}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi) = -\frac{A\omega}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \quad \lightning$$

Beispiel

Vorlesung 10: Schwingung, $x(t)$ = Auslenkung aus Ruhelage

Gesucht Funktion $x(t)$ mit:

$$m\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + c\,x(t) = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

+ Äußere T-periodische Kraft k

$$m\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + c\,x(t) = k(t) \qquad (\mathrm{II})$$

Lösung von I nach Vorlesung 10: $x_h(t) = e^{-\frac{r}{2m}t}\left(a\cos(\beta t) + b\sin(\beta t)\right)$
(falls $r^2 - 4mc < 0$)

Bestimme eine Lösung $x_p(t)$ von II, dann:

Lösungen von II = $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$

Idee: Entwickle

$$k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\omega t) + b_k\cos(k\omega t)$$

oder

$$k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

Fourier-Reihen

Buch Kap. 3.9

Ansatz: $x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ik\omega t}$

suche α_k

habe γ_k

Beispiel

$$\dot{x}_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (ik\omega) e^{ik\omega t}$$

$$\ddot{x}_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (ik\omega)^2 e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (-1) k^2 \omega^2 e^{ik\omega t}$$

Falls die beteiligten Reihen konvergieren:

$$m \ddot{x}(t) + r \dot{x}(t) + c\, x(t) = k(t)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} -mk^2\omega^2 \cdot \alpha_k e^{ik\omega t} + rik\omega \cdot \alpha_k e^{ik\omega t} + c \cdot \alpha_k e^{ik\omega t} \overset{!}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

Die $e^{ik\omega t}$ bilden ein Orthonormalsystem

$\longrightarrow$ Koeffizienten links und rechts müssen gleich sein!

$$(-mk^2\omega^2 + irk\omega + c) \cdot \alpha_k \cdot e^{ik\omega t} = \gamma_k e^{ik\omega t}$$

$$\alpha_k = \frac{\gamma_k}{(c - mk^2\omega^2) + i(rk\omega)} \qquad |\alpha_k| < \frac{|\gamma_k|}{rk\omega}$$

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikwt}$$

Beispiel

$a_k = \gamma_k + \gamma_{-k}$ $\qquad b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k})$

$$x(t) = \underbrace{\underset{\downarrow\atop 0}{e^{-\frac{r}{2m}t}} \big(\underbrace{a\cos(\beta t) + b\sin(\beta t)}_{\text{beschränkt}}\big)}_{\to 0} + x_p(t)$$

$\underset{\downarrow\atop \infty}{t}$

Auf Dauer Lösung $\longrightarrow$ periodische Funktion

Reelle Darstellung wieder über $\quad a_k = \gamma_k + \gamma_{-k}$

$b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k})$

Fourier-Reihen

Beispiel

Interpolation

Interpolation

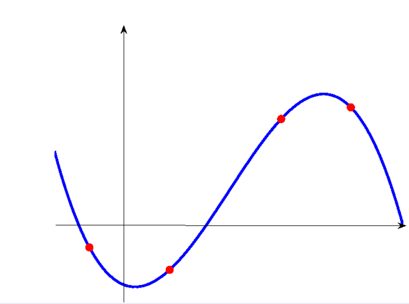
Buch Kap. 2.17

Problemstellung

Gegeben: Diskrete Werte einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an $n+1$ Stützstellen

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n.$$

Eingabedaten: $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \cdots, (x_n, f_n)$.



Gegebene Daten (x_j, f_j).

Interpolation

Buch Kap. 2.17

Problemstellung

Gesucht: *Simple* Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Daten interpoliert, d.h.

$$p(x_i) = f_i \qquad \text{für alle } i = 0, 1, \ldots, n,$$

z.B.: p Polynom, trigonometrisches Polynom, rationale Funktion.

Fragen

- Gibt es so ein p? Falls ja, ist p eindeutig?
- Wie sieht die Lösung p aus und wie berechnet man p?

Interpolation

Klassische Polynom-Interpolation

Bestimme ein Polynom (höchstens) n-ten Grades

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

das die gegebenen Daten interpoliert, so dass $p_n(x_i) = f_i$, $0 \leq i \leq n$.

Erster Lösungsansatz:

Die Interpolationsbedingungen ergeben lineares System

$$\begin{array}{rcl} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n & = & f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n & = & f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n & = & f_n \end{array}$$

Klassische Polynom-Interpolation (Beispiel)

Klassische Polynom-Interpolation (Beispiel)

Interpolation

Buch Kap. 2.17

Klassische Polynom-Interpolation

Die Koeffizientenmatrix des linearen Systems

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},$$

kurz $V \cdot a = f$, heißt Vandermonde-Matrix.

Satz

Für die Determinante der Vandermonde-Matrix $V \equiv V(x_0, \dots, x_n)$ gilt

$$\det(V) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Existenz und Eindeutigkeit der Polynom-Interpolation

Folgerung

Falls Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschieden, so ist V eine invertierbare Matrix.

Satz

Zu paarweise verschiedenen Stützstellen

$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$$

und Funktionswerten

$$f_0, f_1 \ldots, f_n \in \mathbb{R}$$

gibt es genau ein interpolierendes Polynom p_n vom Höchstgrad n mit

$$p_n(x_i) = f_i \qquad \text{für alle } 0 \leq i \leq n.$$

Klassische Polynom-Interpolation (Beispiel)

Interpolation

Buch Kap. 2.17

Lagrange-Darstellung

Definiere Lagrange-Polynome

$$L_j(x) \;:=\; \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{j-1})\cdot(x-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_j-x_{j-1})\cdot(x_j-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x_j-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i} \qquad \text{für } 0 \le j \le n.$$

Dann ist L_j ein Polynom vom Grad n, und es gilt

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \qquad \text{für } 0 \le i,j \le n.$$

Interpolation

Buch Kap. 2.17

Lösung mit der Lagrange-Darstellung

Die Interpolationsaufgabe

$$p_n(x_i) = f_i \qquad \text{für alle } 0 \leq i \leq n$$

wird gelöst durch das (eindeutige) Polynom

$$p_n(x) = f_0 L_0(x) + \ldots + f_n L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x).$$

Die obige Darstellung von p_n heißt Lagrange-Darstellung.

Lagrange-Darstellung (Beispiel)

Lagrange-Darstellung (Beispiel)

Lagrange-Darstellung (Beispiel)