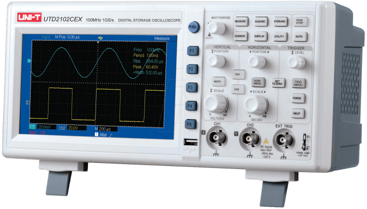
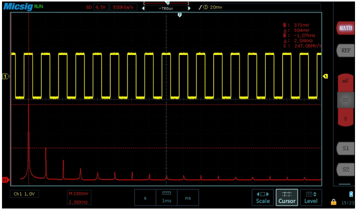
Periodische Funktionen und Fourier-Reihen

FOURIER-Reihen

Buch Kap. 3.9





FOURIER-Reihen

Buch Kap. 3.9

Definition 3.17:(periodische Funktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche

$$f(x+T) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, heißt periodisch mit Periode $T > 0$. Das kleinste solche T, heißt die **Minimalperiode** oder auch primitive Periode von f.

Bemerkung

Ist f T–periodisch und integrierbar (über endlichen Intervallen), so gilt

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_a^{a+T} f(t)\,dt$$

für beliebige $a \in \mathbb{R}$.

FOURIER-Reihen

Buch Kap. 3.9

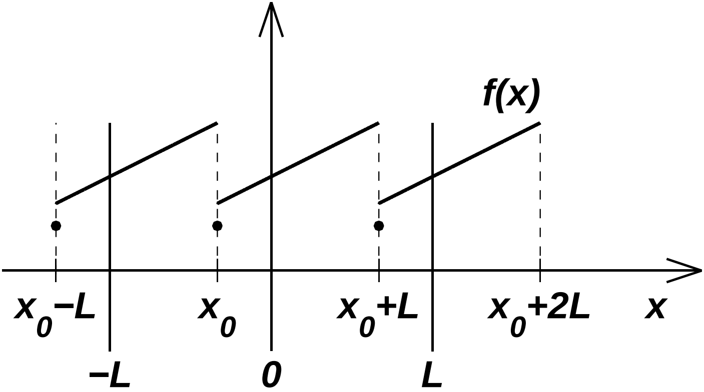


Abbildung 3.20: L-periodische Funktion mit Periodizitätsintervallen $[x_0 + kT, x_0 + (k+1)T),\ x_0 \in \mathbb{R}$

FOURIER-Reihen

Buch Kap. 3.9

Ziel

Entwicklung einer periodischen Funktion f in eine Fourier-Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

Grundschwingungen: $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$

Oberschwingungen: $\cos(k\omega t)$, $\sin(k\omega t)$, $k = 2, 3, \ldots$

FOURIER-Reihen

Buch Kap. 3.9

Bemerkungen

- Eine Reihe der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \qquad \text{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}\text{)}$$

  heisst Fourier-Reihe. Dabei sei

$$\omega = \frac{2\pi}{T} > 0.$$

- Die zugehörigen Partialsummen

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \qquad \text{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}\text{)}$$

  der Fourier-Reihe $f(t)$ heißen trigonometrische Polynome vom Grad n.

FOURIER-Reihen

Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe

- Es gilt

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \quad \text{und} \quad \sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

- Damit gilt für die trigonometrischen Polynome

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k}{2}\left(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}\right) + \frac{b_k}{2i}\left(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}\right)\right] \\ &= \frac{a_0}{2} \cdot e^{0 \cdot k\omega t} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t}\right] \end{aligned}$$

Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe

- Somit kann man die trigonometrischen Polynome schreiben als

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

mit den Koeffizienten

$$\gamma_0 = \tfrac{1}{2} a_0, \qquad \gamma_k = \tfrac{1}{2}(a_k - ib_k), \qquad \gamma_{-k} = \tfrac{1}{2}(a_k + ib_k),$$

womit gilt $a_0 = 2\gamma_0, \qquad a_k = \gamma_k + \gamma_{-k}, \qquad b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k}).$

- Für die Darstellung der Fourier-Reihe bekommt man somit

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

FOURIER-Reihen

Buch Kap. 3.9

Wichtigste Fragen

- Wie komme ich an die Koeffizienten ran?
- (Wann) konvergiert die Fourier-Reihe (punktweise oder gleichmäßig)?

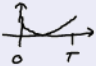
Orthonormalität der Basisfunktionen

Buch Kap. 3.9

Satz

Die Funktionen $e^{ik\omega t}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\omega = 2\pi/T$, bilden ein Orthonormalsystem bezüglich des Skalarprodukts

f 

f^2 

$$\langle u, v\rangle := \frac{1}{T}\int_0^T \overline{u(t)}v(t)\,dt.$$

Beweis

$$(f,g) := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\overline{g}(t)\,dt$$

$$\overline{e^{ij\omega t}} = \overline{\cos(j\omega t) + i\sin(j\omega t)} = \cos(-j\omega t) + i\sin(-j\omega t) = e^{-ij\omega t}$$

$u_k(t) = e^{ik\omega t}$ $\quad k \neq j$: $\quad (u_k, u_j) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{ik\omega t}\,\overline{e^{ij\omega t}}\,dt$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T e^{ik\omega t}e^{-ij\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i\omega t(k-j)}\,dt = \frac{1}{Ti\omega(k-j)}\left(e^{\frac{2\pi i t}{T}(k-j)}\Big|_0^T\right) \leftarrow 0$$

$$= 0$$

$$(u_k, u_k) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{ik\omega t}\,e^{-ik\omega t}\,dt = 1$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Satz

Konvergiert die Fourier-Reihe

$$f_n = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k u_k$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad u_k(t) = e^{ik\omega t}$$

auf $[0, T]$ gleichmäßig gegen eine Funktion f, so ist f stetig und es gilt:

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t}\, dt \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis

$-n \le k \le n$ $\quad \langle f_n, u_k \rangle = \langle \sum_{j=-n}^{n} \gamma_j u_j, u_k \rangle = \sum_{j=-n}^{n} \gamma_j \underbrace{\langle u_j, u_k \rangle}_{= \delta_{jk}} = \gamma_k$

Also $\gamma_k = \langle f_n, u_k \rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle f, u_k \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Fourier-Koeffizienten in $\mathbb{R}$

$$\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \quad k \neq \ell \\ T/2 & : \quad k = \ell \neq 0 \\ T & : \quad k = \ell = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(\ell\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \quad k \neq \ell \\ T/2 & : \quad k = \ell \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \text{für } k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt \quad \text{für } k > 0$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Fourier-Koeffizienten in $\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,dt &= \begin{cases} 0 & : \quad k \neq \ell \\ T/2 & : \quad k = \ell \neq 0 \\ T & : \quad k = \ell = 0 \end{cases} \\
\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(\ell\omega t)\,dt &= \begin{cases} 0 & : \quad k \neq \ell \\ T/2 & : \quad k = \ell \neq 0 \end{cases} \\
\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,dt &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \text{für } k \geq 0 \\
b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt \quad \text{für } k > 0
\end{aligned}
$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Definition

Für eine integrierbare Funktion $f : [0, T] \to \mathbb{C}$ werden die Fourier-Koeffizienten von $f(t)$ definiert durch

$$\gamma_k := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t}\, dt \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

Dabei ist $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz.

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t)\, dt$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Bemerkung

Mit den (komplexen) Fourier-Koeffizienten γ_k bekommt man die (reellen) Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_k &:= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \qquad \text{für } k \geq 0 \\ b_k &:= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt \qquad \text{für } k > 0 \end{aligned}$$

Definition

Die mit den Fourier-Koeffizienten gebildete Reihe

$$F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

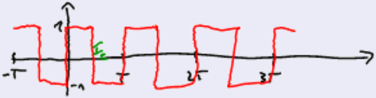
heißt die Fourier-Reihe von $f(t)$.

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Beispiel

$$\cos(\pi k) = (-1)^k$$



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) dt = \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(2\pi k\frac{t}{T}\right)dt - \int_{\frac{T}{2}}^{T}\cos\left(2\pi k\frac{t}{T}\right)dt\right)$$

$$= \frac{2}{T}\,\frac{T}{2\pi k}\sin\left(2\pi k\frac{t}{T}\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2}{T}\,\frac{T}{2\pi k}\sin\left(2\pi k\frac{t}{T}\right)\Big|_{\frac{T}{2}}^{T} = 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(2\pi k\frac{t}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin\left(2\pi k\frac{t}{T}\right)dt - \int_{\frac{T}{2}}^{T}\sin\left(2\pi k\frac{t}{T}\right)dt$$

$$= \frac{-2}{T}\,\frac{T}{2\pi k}\cdot\cos\left(2\pi k\frac{t}{T}\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{2}{T}\,\frac{T}{2\pi k}\cos\left(2\pi k\frac{t}{T}\right)\Big|_{\frac{T}{2}}^{T}$$

$$= \frac{-1}{\pi k}\left((-1)^k - 1\right) + \frac{1}{\pi k}\left(1 - (-1)^k\right) = \frac{2}{\pi k}\left(1 - (-1)^k\right)$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Buch Kap. 3.9

Beispiel

$a_k = 0$

$b_k = \frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right)$ $\quad b_1 = \frac{4}{\pi}, \; b_2 = 0, \; b_3 = \frac{4}{3\pi}, \; b_4 = 0$

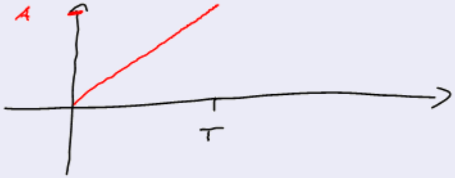
$b_5 = \frac{4}{5\pi} \; \ldots$

$b_{2k} = 0, \quad b_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi}$

Fourierreihe $\quad \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \sin((2k+1)\omega t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin((2k+1)\omega t)$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Beispiel



$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t \quad \forall\, t \in [0,T)$$

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-ik\omega t}\, dt = \frac{A}{T^2} \int_0^T t\, e^{-i\omega t}\, dt$$