Interpolation

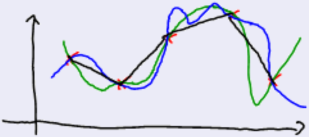
Interpolation

Buch Kap. 2.17

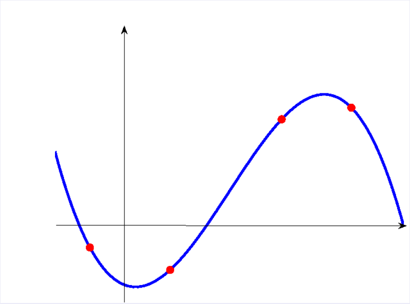
Problemstellung

Gegeben: Diskrete Werte einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an $n+1$ Stützstellen

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n.$$



Eingabedaten: $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \cdots, (x_n, f_n)$.



→ Interpolations-problem ist nicht eindeutig lösbar

Gegebene Daten (x_j, f_j).

Interpolation

Buch Kap. 2.17

Problemstellung

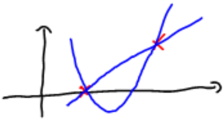
Gesucht: *Simple* Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Daten interpoliert, d.h.

$$p(x_i) = f_i \qquad \text{für alle } i = 0, 1, \ldots, n,$$

z.B.: p Polynom, trigonometrisches Polynom, rationale Funktion.

Fragen

- Gibt es so ein p? Falls ja, ist p eindeutig?
- Wie sieht die Lösung p aus und wie berechnet man p?



Interpolation

Buch Kap. 2.17

Klassische Polynom-Interpolation

Bestimme ein Polynom (höchstens) *n*-ten Grades

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

das die gegebenen Daten interpoliert, so dass $p_n(x_i) = f_i$, $0 \leq i \leq n$.

Erster Lösungsansatz:

Die Interpolationsbedingungen ergeben lineares System

$$\begin{array}{lrcl} p(x_0) = & a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n & = & f_0 \\ p(x_1) = & a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n & = & f_1 \\ & \vdots & & \vdots \\ p(x_n) & a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n & = & f_n \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_{=: V \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Interpolation

Buch Kap. 2.17

Klassische Polynom-Interpolation (Beispiel)

$(x_0, f_0) = (0, 1)\,,\quad (x_1, f_1) = (2, 9)\,,\quad (x_2, f_2) = (3, 16)$

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a_0 = 1$$

$$\wedge \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a_2 = 1 \qquad a_1 = 2$

Klassische Polynom-Interpolation (Beispiel)

$$\Rightarrow \quad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 1 + 2x + x^2 = (x+1)^2$$

In der Tat: $p(x_0) = p(0) = 1 = f_0$ ✓

$$p(x_1) = p(2) = 9 = f_1$$

$$p(x_2) = p(3) = 16 = f_2$$

Determinantenformel:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le 1} (x_j - x_i) = (x_1 - x_0)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le 2} (x_j - x_i) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{pmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le 3} (x_j - x_i) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

Interpolation

Buch Kap. 2.17

Klassische Polynom-Interpolation

Die Koeffizientenmatrix des linearen Systems

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},$$

kurz $V \cdot a = f$, heißt Vandermonde-Matrix.

Satz

Für die Determinante der Vandermonde-Matrix $V \equiv V(x_0, \dots, x_n)$ gilt

$$\det(V) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Existenz und Eindeutigkeit der Polynom-Interpolation

Folgerung

Falls Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschieden, so ist V eine invertierbare Matrix.

Satz

Zu paarweise verschiedenen Stützstellen

$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$$

und Funktionswerten

$$f_0, f_1 \ldots, f_n \in \mathbb{R}$$

gibt es genau ein interpolierendes Polynom p_n vom Höchstgrad n mit

$$p_n(x_i) = f_i \qquad \text{für alle } 0 \leq i \leq n.$$

Klassische Polynom-Interpolation (Beispiel)

Lagrange-Darstellung

Definiere Lagrange-Polynome

$$L_j(x) := \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{j-1})\cdot(x-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_j-x_{j-1})\cdot(x_j-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x_j-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i} \quad \text{für } 0\leq j\leq n.$$

Dann ist L_j ein Polynom vom Grad n, und es gilt

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i\neq j \end{cases} \qquad \text{für } 0\leq i,j\leq n.$$

Interpolation

Lösung mit der Lagrange-Darstellung

Die Interpolationsaufgabe

$$p_n(x_i) = f_i \qquad \text{für alle } 0 \leq i \leq n$$

wird gelöst durch das (eindeutige) Polynom

$$p_n(x) = f_0 L_0(x) + \ldots + f_n L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x).$$

Die obige Darstellung von p_n heißt Lagrange-Darstellung.

 Buch Kap. 2.17

Lagrange-Darstellung (Beispiel)

$(x_0, f_0) = (0, 1)$, $(x_1, f_1) = (2, 5)$, $(x_2, f_2) = (3, 16)$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(-2)\cdot(-3)} = \frac{1}{6}(x^2-5x+6) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{x\,(x-3)}{2\,(-1)} = -\frac{1}{2}(x^2-3x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x\,(x-2)}{3} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x$$

$$p(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x)$$

Interpolation

Buch Kap. 2.17

Lagrange-Darstellung (Beispiel)

$$= \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + 1 + 9\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right) + 16\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x\right)$$

$$= \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{2}x + \frac{16}{3}x^2 - \frac{32}{3}x$$

$$= x^2\left(\frac{1}{6} - \frac{9}{2} + \frac{16}{3}\right) + x\left(-\frac{5}{6} + \frac{27}{2} - \frac{32}{3}\right) + 1$$

$$= x^2\,\frac{1-27+32}{6} + x\,\frac{-5+81-64}{6} + 1$$

$$= x^2\,\frac{6}{6} + x\,\frac{12}{6} + 1 = x^2 + 2x + 1$$

Interpolation

Buch Kap. 2.17

Lagrange-Darstellung (Beispiel)