Riemann-Integral

Buch Kap. 2.13

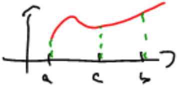
Satz 2.36: (Rechenregeln der Integralrechnung)

Seien f und g integrierbare Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, $a < c < b$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, dann gilt

- $\int_a^b (c_1 f + c_2 g)\, dx = c_1 \int_a^b f\, dx + c_2 \int_a^b g\, dx$,
- $\left| \int_a^b f\, dx \right| \leq \int_a^b |f|\, dx$,
- $\int_a^b f\, dx = \int_a^c f\, dx + \int_c^b f\, dx$,
- $f \geq 0$ auf $[a, b] \Longrightarrow \int_a^b f\, dx \geq 0$,
- ist f auf $[a, b]$ stetig und nichtnegativ, sowie $\int_a^b f\, dx = 0$, so folgt $f \equiv 0$.

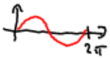
$\int_c^b f + g\, dx = \int_a^b f\, dx + \int_a^b g\, dx$

$\int_a^b c f\, dx = c \int_a^b f\, dx$



Für $a > b$ setzen wir $\int_a^b f\, dx = -\int_b^a f\, dx$

Insbes. $\int_a^a f\, dx = 0$



Integration, Stammfunktion

Buch Kap. 2.13

Definition 2.33: (Stammfunktion)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall I definierte reellwertige Funktion. Die differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

heißt Stammfunktion von f.
Stammfunktionen sind nur bis auf Konstanten festgelegt, d.h. mit F ist auch $F + C$ für $C \in \mathbb{R}$ Stammfunktion zu f.

Bsp: $f(x) = x$ $\quad F(x) = \frac{1}{2}x^2$ ist Stfkt, $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$ auch
$c \in \mathbb{R}$

Beachte: Wenn F, F_1 Stfktn von f, dann gilt $F = F_1 + c$ für eine Konst. $c \in \mathbb{R}$

Bew.: Es gilt $(F - F_1)' = F' - F_1' = f - f = 0 \Rightarrow F - F_1 = c$ Konst.
$\Rightarrow F = F_1 + c$ $\square$

Hauptsätze der Differential-und Integralrechnung

Satz 2.37: (erster Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung)

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I stetig, dann ist die Funktion F, definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt, \qquad (x, a \in I),$$

eine Stammfunktion von f.

Satz 2.37: (zweiter Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung)

Ist F Stammfunktion einer auf einem Intervall I stetigen oder R-integrierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, so gilt für beliebige $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b .$$

Hauptsätze der Differential-und Integralrechnung

Buch Kap. 2.13

Stammfunktion

Ist $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$, so schreiben wir

$$\int f(t)\,dt = F(x) + C.$$

Hierbei heißt $C \in \mathbb{R}$ Integrationskonstante.

Stammfunktionen

Beispiele

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx &= -\cot(x) + C && \text{für } x \neq k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}\\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin(x) + C && \text{für } |x| < 1\\
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C\\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C && \text{für } |x| > 1\\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x + C\\
\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C && \text{für } |x| \neq 1.\\
\int e^{ax}\,dx &= \frac{1}{a}e^{ax} + C && \text{für } a \neq 0.
\end{aligned}
$$

Stammfunktionen

noch mehr Beispiele

$$\int b^x \, dx = \frac{1}{\log(b)} b^x + C \qquad \text{für } b > 0, b \neq 1.$$

$$\int \log(x) \, dx = x(\log(x) - 1) + C \qquad \text{für } x > 0.$$

$$\int \log_b(x) \, dx = \frac{x}{\log(b)} (\log(x) - 1) + C \qquad \text{für } b > 0, x > 0.$$

$$\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) + C$$

$$\int \cosh(x) \, dx = \sinh(x) + C$$

$$\int \tanh(x) \, dx = \log(\cosh(x)) + C$$

$$\int \coth(x) \, dx = \log(|\sinh(x)|) + C \qquad \text{für } x \neq 0.$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\left(\log(x) - 1\right) + C\right) = 1 \cdot (\log(x) - 1) + x \cdot \frac{1}{x} = \log(x) - 1 + 1 = \log(x)$$

Beispiel

Buch Kap. 2.13

Polynome

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\int p(x)\,dx = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \frac{a_{n-2}}{n-1} x^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + C$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} a_{k-1} x^k + C$$

$$\int 2x^3 + 5x^2 - x + 1\,dx = \frac{1}{2} x^4 + \frac{5}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + x + C$$

Substitutionsregel

Buch Kap. 2.13

Satz 2.29: (Substitutionsregel)

Sei f stetig auf dem Intervall J und φ stetig differenzierbar auf dem Intervall I, wobei $\varphi(I) \subset J$ gilt und die Umkehrfunktion φ^{-1} existiert. Dann gilt

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt \text{ mit } t = \varphi(x)$$

Substitutionsregel

Buch Kap. 2.13

Substitutionsregel 1

1) $\varphi(x)$ wird durch t ersetzt (substituiert),
2) wegen $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$ bzw. $dt = \varphi'(x)\, dx$ wird $\varphi'(x)\, dx$ durch dt ersetzt,
3) das Integral $\int f(t)\, dt$ wird berechnet (das sollte einfacher als die Berechnung des Integrals $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx$ sein, sonst wäre die Mühe umsonst!),
4) t wird durch $\varphi(x)$ ersetzt (Rücksubstitution).

Substitutionsregel

Buch Kap. 2.13

Beispiel

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx$$

Subst: $t = \sqrt{x}$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$\Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\,dt$$

$$\| $$

$$\int e^t\, 2\underbrace{\sqrt{x}}_{t}\, dt$$

$$= \int 2t\, e^t\, dt \quad \text{für } t = \sqrt{x}$$

$$= 2\int t\, e^t\, dt = 2(t-1)\, e^t = 2(\sqrt{x}-1)\, e^{\sqrt{x}}$$

Probe: $\left(2(\sqrt{x}-1)\,e^{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}} + 2(\sqrt{x}-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}$

Substitutionsregel

Buch Kap. 2.13

Substitutionsregel 2

1) x wird durch $\varphi(t)$ ersetzt (substituiert),
2) wegen $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ bzw. $dx = \varphi'(t)\,dt$ wird dx durch $\varphi'(t)\,dt$ ersetzt,
3) das Integral $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ wird berechnet,
4) t wird durch $\varphi^{-1}(x)$ ersetzt (Rücksubstitution).

Substitutionsregel

Buch Kap. 2.13

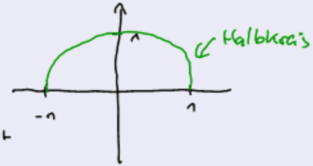
Beispiel

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \overset{!}{=} \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

Überlegung: $x^2 + f(x)^2 = 1$

$\Rightarrow$ Der Punkt $(x, f(x))$ liegt auf dem Einheitskreis



Subst: $x = \cos(t) \quad (t \in [0, \pi])$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\cos(t) = -\sin(t)$$

$$\Rightarrow dx = -\sin(t)\,dt$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_{\arccos(-1)}^{\arccos(1)} \sqrt{1-\cos^2(t)}\,\sin(t)\,dt$$

$$= -\int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2(t)}\,\sin(t)\,dt = -\int_{\pi}^{0} \sin(t)\sin(t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{\pi} \sin^2(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$$

Partielle Integration

Buch Kap. 2.13

Partielle Integration

Für zwei auf einem Intervall I stetig differenzierbare Funktionen u und v ist $u \cdot v$ eine Stammfunktion von $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ und es gilt

$$u(x)v(x) = \int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,dx \quad \text{bzw. nach Satz 2.28}$$

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x))\,dx.$$

Partielle Integration

Buch Kap. 2.13

Beispiel

$$\int \underbrace{x}_{u'} \underbrace{e^x}_{v}\,dx = \frac{1}{2}x^2 e^x - \int \frac{1}{2}x^2 e^x\,dx \quad \text{führt zu nix}$$

$$\int \underbrace{x}_{v} \underbrace{e^x}_{u'}\,dx = x e^x - \int e^x \cdot 1\,dx = x e^x - e^x + C$$

$$= (x-1)\,e^x$$

Probe: $\left((x-1)e^x\right)' = e^x + (x-1)e^x = x e^x$ ✓

Partielle Integration

Buch Kap. 2.13

Beispiel

a)

$$\int \sin^2(t)\,dt = \int \underbrace{\sin(t)}_{u'}\,\underbrace{\sin(t)}_{v}\,dt = -\cos(t)\sin(t) + \int \cos^2(t)\,dt$$

$$= -\cos(t)\sin(t) + \int 1 - \sin^2(t)\,dt$$

$$= -\cos(t)\sin(t) + \int 1\,dt - \int \sin^2(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int \sin^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(-\cos(t)\sin(t) + t\right) + C$$

Insbes.: $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$