Integration rationaler Funktionen

Ziel: Integration rationaler Funktionen

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{wobei} \quad p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k.$$

Methode: Partialbruch-Zerlegung von rationaler Funktion $R(x)$.

Ansatz

$$\begin{aligned} R(x) \quad = \quad & p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x - x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x - x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x - x_j)^{k_j}} \right] \\ & + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1} x + \delta_{j1}}{\left((x - a_j)^2 + b_j^2\right)^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j} x + \delta_{jk_j}}{\left((x - a_j)^2 + b_j^2\right)^{k_j}} \right] \end{aligned}$$

Integration rationaler Funktionen

Erläuterungen

- Ohne Einschränkung: $p(x)$ und $q(x)$ haben keine gemeinsamen Nullstellen.
- Das Polynom $p_1(x)$ tritt nur auf, falls

$$\deg(p) \geq \deg(q).$$

- In diesem Fall berechnet man $p_1(x)$ mit Polynomdivision, und es gilt

$$\frac{p_2(x)}{q(x)} = R(x) - p_1(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad p(x) = p_1(x) \cdot q(x) + p_2(x),$$

  mit $\deg(p_2) < \deg(q)$.
- Das Nennerpolynom $q(x)$ besitze
  - die reellen Nullstellen x_j mit Vielfachheit k_j;
  - die komplexen Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$ mit Vielfachheit k_j und damit komplex konjugierte Nullstellen $\bar{z}_j = a_j - ib_j$.

Integration rationaler Funktionen

Ansatz der Partialbruch-Zerlegung

$$
\begin{aligned}
R(x) \quad = \quad & p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\
& + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1} x + \delta_{j1}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j} x + \delta_{jk_j}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^{k_j}} \right]
\end{aligned}
$$

Unbekannte Parameter, die bestimmt werden müssen:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{j\ell}, \qquad j = 1, \ldots, n_1,\ \ell = 1, \ldots, k_j; \\
&\gamma_{j\ell}, \qquad j = n_1 + 1, \ldots, n_2,\ \ell = 1, \ldots, k_j; \\
&\delta_{j\ell}, \qquad j = n_1 + 1, \ldots, n_2,\ \ell = 1, \ldots, k_j.
\end{aligned}
$$

Diese Parameter werden durch Koeffizientenvergleich berechnet, die rechte Seite wird dabei auf den Hauptnenner gebracht.

Integration rationaler Funktionen

Beispiel

$$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$$

Ansatz:

$$\frac{x(x^2+1)}{x(x^2+1)}$$

$$R(x) = \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{x^2+1} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \quad 1 - x = x(x^2+1)\alpha_1 + (x^2+1)\alpha_2 + x^2(\gamma_1 x + \delta_1)$$

$$0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 1 - x \overset{!}{=} x^3\alpha_1 + x\alpha_1 + x^2\alpha_2 + \alpha_2 + \gamma_1 x^3 + \delta_1 x^2$$

Ausmultiplizieren: $1 - x = (\alpha_1 + \gamma_1)x^3 + (\alpha_2 + \delta_1)x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$

Koeffizientenvergleich: $\alpha_1 + \gamma_1 = 0, \; \alpha_2 + \delta_1 = 0, \; \alpha_1 = -1, \; \alpha_2 = 1$

$\delta_1 = -1$

Partialbruchzerlegung: $R(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}. \quad (*)$

$-1 + \gamma_1 = 0$

$\gamma_1 = 1$

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Beispiel

$$\int -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1} \, dx$$

$$= -\ln(|x|) + \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= -\ln(|x|) - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan(x) + c \qquad \left\{ \begin{array}{l} y = x^2+1 \\ \frac{dy}{dx} = 2x \\ 2x\,dx = dy \end{array} \right.$$

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Beispiel

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Vier Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

I: Polynome:

$$\int \sum_{k=0}^{s} c_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{s} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

II: Inverse Potenzen:

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^\ell} = \begin{cases} \log(|x-x_0|) + C & \text{für } \ell = 1 \\ \frac{1}{1-\ell} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{\ell-1}} + C & \text{für } \ell = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Vier Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

I: Polynome:

$$\int \sum_{k=0}^{s} c_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{s} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

II: Inverse Potenzen:

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^\ell} = \begin{cases} \log(|x-x_0|) + C & \text{für } \ell = 1 \qquad u = x - x_0 \\ \frac{1}{1-\ell} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{\ell-1}} + C & \text{für } \ell = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Beispiel

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x(x^4+2x^2+1)}\,dx$$

$x_0 = 0$

$x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

$y^2 + 2y + 1 = 0 \longrightarrow$ p,q Formel

$(y+1)^2 = 0$ $\quad y = -1$

$(x^2+1)^2$ $\quad x^2 = -1$

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\gamma_2 x + \delta_2}{(x^2+1)^2} + \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{(x^2+1)^1} \longrightarrow$$

bestimme Parameter α, δ, γ

zu integrieren $\quad \alpha \int \frac{1}{x}$ ✓ $\quad \int \frac{\gamma_1 x}{(x^2+1)} = \frac{1}{2}\gamma_1 \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ ✓

$\delta_1 \int \frac{1}{x^2+1}$ ✓ $\quad \int \frac{\gamma_2 x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\gamma_2 \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$ $\quad u = x^2+1$ siehe unten

$\delta_2 \quad \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$ schwieriger

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Vier Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

III:

$$I_\ell := \int \frac{1}{(x^2+1)^\ell}\,dx \qquad \text{für } \ell \in \mathbb{N}$$

- Für $\ell = 1$ gilt

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x) + C$$

- Für $\ell > 1$ kann man I_ℓ wie folgt *rekursiv* berechnen.

$$\underline{I_\ell} = \frac{1}{2(1-\ell)}\left[(3-2\ell)\underline{I_{\ell-1}} - \frac{x}{(x^2+1)^{\ell-1}}\right] \qquad \text{für } \ell = 2, 3, \ldots.$$

z.B.

$$\underset{\ell=2}{I_2} = \int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2(1-2)}\Big[(3-2\cdot 2)\underset{\arctan(x)}{I_1} - \frac{x}{(x^2+1)^{2-1}}\Big] + C$$

Integration rationaler Funktionen

Herleitung der Rekursion.

- Substitution: Setze $u = x^2 + 1$ in

$u = x^2 + 1 \qquad \frac{du}{dx} = 2x \qquad 2x\,dx = du$

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^\ell}\,dx = \int \frac{du}{u^\ell} = \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{u^{\ell-1}} + C$$

$\ell > 1$

$$= \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}} + C$$

wie oben

- Partielle Integration:

$$I_{\ell-1} = \int \frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^\ell}\,dx = \int \frac{x}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^\ell}\,dx + I_\ell$$
$$= \frac{x}{2(1-\ell)(x^2+1)^{\ell-1}} - \frac{1}{2(1-\ell)}\cdot I_{\ell-1} + I_\ell$$

Somit:

$$I_\ell = \frac{1}{2(1-\ell)}\left[(3-2\ell)I_{\ell-1} - \frac{x}{(x^2+1)^{\ell-1}}\right] \qquad \text{für } \ell = 2, 3, \ldots. \qquad \square$$

Herleitung der Rekursion.

- Substitution: Setze $u = x^2 + 1$ in

$g'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^\ell}$

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^\ell}\,dx = \int \frac{du}{u^\ell} = \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{u^{\ell-1}} + C$$

$$= \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}} + C$$

$g(x)$

- Partielle Integration:

$\frac{x^2+1}{x^2+1}$ ✓

x^2

$$I_{\ell-1} = \int \frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^\ell}\,dx = \int \underbrace{\frac{x}{2}}_{f}\cdot\underbrace{\frac{2x}{(x^2+1)^\ell}}_{g'}\,dx + I_\ell$$

$$= \frac{x}{2(1-\ell)(x^2+1)^{\ell-1}} - \frac{1}{2(1-\ell)}\cdot I_{\ell-1} + I_\ell$$

$f \quad g \quad 1$

$f\cdot g$

$\int f'\cdot g\,dx$

$\int f\cdot g' = f\cdot g - \int f'\cdot g$

Somit:

$\int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}}\,dx$

$$I_\ell = \frac{1}{2(1-\ell)}\left[(3-2\ell)I_{\ell-1} - \frac{}{(x^2+1)^{\ell-1}}\right] \text{ für } \ell = 2, 3, \ldots.$$

Herleitung der Rekursion.

- Substitution: Setze $u = x^2 + 1$ in

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{(x^2+1)^\ell}\,dx &= \int \frac{du}{u^\ell} = \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{u^{\ell-1}} + C \\ &= \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}} + C\end{aligned}$$

- Partielle Integration:

$$\begin{aligned}I_{\ell-1} &= \int \frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^\ell}\,dx = \int \frac{x}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^\ell}\,dx + I_\ell \\ &= \frac{x}{2(1-\ell)(x^2+1)^{\ell-1}} - \frac{1}{2(1-\ell)}\cdot I_{\ell-1} + I_\ell\end{aligned}$$

Somit:

$$I_\ell = \frac{1}{2(1-\ell)}\left[(3-2\ell)I_{\ell-1} - \frac{x}{(x^2+1)^{\ell-1}}\right] \qquad \text{für } \ell = 2, 3, \ldots . \qquad \square$$

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

IV:

$(x-(a+ib))(x-(a-ib))$

$\underline{x^2-2ax+a^2}+b^2$

$(x-a)^2+b^2$

$$\int \frac{cx+d}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx$$

$$=\frac{c}{2}\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx+(d+ca)\int \frac{dx}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}$$

Zähler: zerlege in $((x-a)^2+b^2)'\cdot k+\text{Rest}$

also $2(x-a)\cdot k+\text{Rest}$

$$cx+d=\underline{\frac{c}{2}2(x-a)}+ca+d$$

$$\underline{cx-ca+ca}$$

$$cx$$

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

IV:

$$\int \frac{cx+d}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx$$
$$=\frac{c}{2}\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx+(d+ca)\int \frac{dx}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}$$

- Erstes Integral:

$$\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx = \int \frac{du}{u^\ell} \qquad \text{mit } \underline{u=(x-a)^2+b^2}.$$

$$=\begin{cases} \log\left(\left|(x-a)^2+b^2\right|\right)+C & \text{für } \ell=1 \\ \dfrac{1}{1-\ell}\cdot\dfrac{1}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\ell-1}}+C & \text{für } \ell=2,3,\ldots \end{cases}$$

Integration rationaler Funktionen

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

IV:

$$\int \frac{cx+d}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx$$
$$=\frac{c}{2}\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx+(d+ca)\int \frac{dx}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}$$

- Zweites Integral: Ich kann $\int \frac{1}{(1+t^2)^\ell}\,dt$

$$\int \frac{dx}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}=\frac{1}{b^{2\ell-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^\ell} \qquad \text{mit} \qquad t=\frac{x-a}{b}.$$

↑ brauche 1

$$\int \frac{1}{\left(b^2\left(1+\frac{(x-a)^2}{b^2}\right)\right)^\ell}\,dx=\frac{1}{b^{2\ell}}\int \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right)^\ell}\,dx \qquad t=\frac{x-a}{b}$$

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Beispiel

$$= \frac{1}{b^{2l}} \int \frac{1}{(1+t^2)^l} \cdot b \cdot dt$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{b}$$

$$dx = b \cdot dt$$

$$= \frac{1}{b^{2l-1}} \int \frac{1}{(1+t^2)^l} dt$$

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Beispiel

Betrachten erneut die rationale Funktion

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1-x}{x^2(x^2+1)} \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1} \end{aligned}$$

Somit bekommt man

$$\begin{aligned} \int R(x)\,dx &= -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= -\log(|x|) - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \arctan(x) + C \end{aligned}$$

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Beispiel

$$\int \frac{4x^3+12x^2+14x+50}{(x^2+6x+13)(x-1)(x-2)}\,dx = \int \frac{cx+d}{x^2+6x+13} + \frac{\alpha_1}{x-1} + \frac{\alpha_2}{x-2}\,dx$$

$$f(x) = \frac{cx+d}{x^2+6x+13} + \frac{\alpha_1}{x-1} + \frac{\alpha_2}{x-2}$$

$\longrightarrow$ gemeinsamer Nenner

$\longrightarrow$ Zähler gleich setzen

$\longrightarrow$ $\alpha_1 = c = d = 1 \quad \alpha_2 = 2$

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx + \int \frac{1\cdot x+1}{x^2+6x+13}\,dx$$

$$\underbrace{\ln(|x-1|) + 2\ln(|x-2|)}_{A(x)} + \int \frac{\frac{1}{2}(2x+6)-2}{x^2+6x+13}\,dx$$

$(x^2+6x+13)' = 2x+6$

$x+1 = \frac{1}{2}(2x+6) \underset{-3+1}{}$

$$= A(x) + \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+13}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2+6x+13}\,dx$$

$$u = x^2+6x+13$$

$$\frac{du}{dx} = 2x+6$$

$$(2x+6)\,dx = du$$

$$= A(x) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du - 2\int \frac{1}{(x+3)^2+4}\,dx$$

$$= A(x) + \frac{1}{2}\ln(|u|) - 2\,\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\frac{(x+3)^2}{4}}\,dx$$

überführen in $\int \frac{1}{1+t^2}$

$$= A(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+13) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+3}{2}\right)^2}\,dx$$

$$x^2+2\cdot 3x+13 = (x+3)^2+4$$

$$x^2+6x+9-9+13$$

$$= A(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+13) - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{1+t^2}\cdot 2\,dt}_{\arctan(t)+c}$$

$$\frac{x+3}{2} = t \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}$$

$$dx = 2\cdot dt$$

$$= \ln(|x-1|) + 2\ln(|x-2|) + \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+13) + \arctan\left(\frac{x+3}{2}\right) + C$$

Integration rationaler Funktionen

Substitution bei verwandten Integralen.

Sei $R(x)$ eine rationale Funktion.
Dann lassen sich die folgenden Integrale durch Substitution vereinfachen.

- Setze $t = e^x$ in
$$\int R(e^x)\,dx = \int \frac{R(t)}{t}\,dt$$
- Mit $t = \tan(x/2)$ bekommt man
$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{und} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$
und somit durch Substitution in
$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Beispiel