Partialbruchzerlegung mittels “Zuhaltemethode”

Annahme

Das Nennerpolynom hat nur einfache Nullstellen.

Beispiel

$$\frac{5x+1}{(x+2)(x-3)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-1}$$

$$A = \frac{5(-2)+1}{(-2-3)(-2-1)} = -\frac{3}{5} \qquad B = \frac{5\cdot 3+1}{5\cdot 2} = \frac{8}{5}$$

$$C = -1$$

Probe: $$\frac{-\frac{3}{5}}{x+2} + \frac{\frac{8}{5}}{x-3} - \frac{1}{x-1} = \frac{-\frac{3}{5}(x-3)(x-1) + \frac{8}{5}(x+2)(x-1) - (x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)(x-1)}$$

$$= \frac{-\frac{3}{5}x^2 + \frac{12}{5}x - \frac{9}{5} + \frac{8}{5}x^2 + \frac{8}{5}x - \frac{16}{5} - x^2 + x + 6}{(x+2)(x-3)(x-1)} = \frac{5x+1}{(x+2)(x-3)(x-1)}$$

Partialbruchzerlegung mittels "Zuhaltemethode"

Beispiel

Warum?
$$\frac{5x+1}{(x+2)(x-3)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-1}$$

$$\frac{5\cdot(-2)+1}{(-2-3)(-2-1)} = \lim_{x\to -2} (x+2)\frac{5x+1}{(x+2)(x-3)(x-1)} = \lim_{x\to -2} (x+2)\left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-1}\right)$$

$$\frac{5x+1}{(x+1)^2\,(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

$$A = \frac{4}{3}, \quad C = \frac{11}{9} \qquad -\frac{1}{2} = \frac{5\cdot 0+1}{(0+1)^2(0-2)} = A + B - \frac{C}{2} = \frac{4}{3} + B - \frac{11}{18}$$

$$B = -\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + \frac{11}{18} = \frac{-9-24+11}{18} = -\frac{22}{18} = -\frac{11}{9}$$

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Substitution bei verwandten Integralen.

Sei $R(x)$ eine rationale Funktion.
Dann lassen sich die folgenden Integrale durch Substitution vereinfachen.

- Setze $t = e^x$ in

$$\int R(e^x)\,dx = \int \frac{R(t)}{t}\,dt$$

$f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$

- Mit $t = \tan(x/2)$ bekommt man

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{und} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

und somit durch Substitution in

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Beispiel

$$\int_a^b \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx = \int_{e^a}^{e^b} \frac{1-t}{t(1+t)}\,dt \qquad t = e^x$$

$$= \int_{e^a}^{e^b} \frac{1}{t} - \frac{2}{1+t}\,dt = \log(t) - 2\log(1+t)\Big|_{e^a}^{e^b}$$

$$= b - a - 2\log(1+e^b) + 2\log(1+e^a)$$

$$\int_a^b \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,dx = \int_{\tan(\frac{a}{2})}^{\tan(\frac{b}{2})} \frac{1}{1+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_{\tan(\frac{a}{2})}^{\tan(\frac{b}{2})} \frac{(1+t^2)^2 \cdot 2}{(1+t^2)^2+4t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Integration rationaler Funktionen

Buch Kap. 2.13

Beispiel

Uneigentliche Integrale

Buch Kap. 2.16

Definition 2.36: (uneigentliches Integral)

Die Funktion f sei auf dem rechts offenen Intervall $[a, b)$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, erklärt und auf jedem Intervall $[a, c]$, $c < b$, Riemann integrierbar. Wir setzen

$$\text{a)} \quad \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)\,dx, \ \text{falls } b < \infty,$$

und

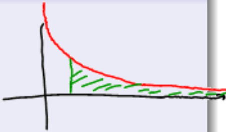
$$\text{b)} \quad \int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,dx, \ \text{falls } b = \infty.$$

Integrale des Typs a) oder b) heißen uneigentliche Integrale. Wir sagen, dass ein uneigentliches Integral konvergiert, falls der entprechende Grenzwert exisitiert. Ansonsten sprechen wir von Divergenz.

Uneigentliche Integrale

Buch Kap. 2.16

Beispiel



a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^\infty x^{-2}\,dx$

$= \lim_{c\to\infty} \int_1^c x^{-2}\,dx = \lim_{c\to\infty} -x^{-1}\Big|_1^c$ $= 1 - \frac{1}{c}$

$= 1$

b) $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{1}{x}\,dx = \infty$

$= \log(c)$

$\left((x+1)e^{-x}\right)'$

$= -e^{-x} + (x+1)e^{-x}$

c) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_0^c e^{-x}\,dx = 1$

$= 1 - e^{-c}$

d) $\int_0^\infty x e^{-x}\,dx = \lim_{c\to\infty} -(x+1)e^{-x}\Big|_0^c = 1$

Uneigentliche Integrale

Buch Kap. 2.16

Beispiel

$\alpha > 0$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \lim\limits_{c\to\infty} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_1^c & : \alpha \neq 1 \\ \underbrace{\lim\limits_{c\to\infty} \log(c)}_{=\infty} & : \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{c\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(c^{1-\alpha} - 1\right) & : \alpha \neq 1 \\ \infty & : \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \infty & : \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & : \alpha > 1 \\ \infty & : \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \infty : \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} : \alpha > 1 \end{cases}$$

NR:

$$\lim_{c\to\infty} c^{1-\alpha} = \begin{cases} 0 : \alpha > 1 \\ \infty : \alpha < 1 \end{cases}$$