Parameterintegrale

Buch Kap. 2.15

Beispiele

- Gamma-Funktion (interpoliert die Fakultät)

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0,$$

- Bessel-Funktionen (Ausbreitung von Wellen, Schwingungsverhalten elastischer Körper)

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt, \quad n \in \mathbb{N},$$

- Laplace-transformierte einer Funktion f (gewöhnliche Differentialgleichungen überführen in algebraischer Gleichungen)

$$F(s) := \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt.$$

$$F'(s) \overset{?}{=} \int_0^\infty f(t)(-t) e^{-st} dt$$

Die Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

Beh: $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Bew: Induktion nach n.

IA: $n = 1$ $\quad \Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t}\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1 = 0!$

IS: $n \to n+1$:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty \underbrace{t^n}_{u}\, \underbrace{e^{-t}}_{v'}\,dt = t^n \cdot (-e^{-t})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty n\, t^{n-1} (-e^{-t})\,dt$$

$$= n \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t}\,dt = n\,\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$$

Parameterintegrale

Buch Kap. 2.15

Satz 2.39: (Differentiation bestimmter Parameterintegrale)

Seien $[a, b]$ und $[c, d]$ abgeschlossene Intervalle und die Funktion $f(x, y)$ in $[a, b] \times [c, d]$ sei stetig bezüglich des Parameters x und integrierbar bezüglich der Veränderlichen y. Dann gilt für das Parameterintegral

$$F(x) := \int_c^d f(x, y)\, dy, \quad a \leq x \leq b,$$

a) F ist in $[a, b]$ stetig,

b) ist f zusätzlich auf $[a, b]$ nach dem Parameter x stetig differenzierbar, dann ist F differenzierbar und hat die Ableitung

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d \frac{d\, f(x, y)}{d\, x}\, dy\ .$$

Beispiel

a)
$$F(x) = \int_1^\pi \frac{\sin(tx)}{t}\,dt$$
$$F'(x) = \int_1^\pi \frac{t\cos(tx)}{t}\,dt = \int_1^\pi \cos(tx)\,dt$$

b) Bessel-Funktion
$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)\,dt$$
$$J_n'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t\cdot\sin(x\sin t - nt)\,dt$$
$$J_n''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 t\cdot\cos(x\sin t - nt)\,dt$$

Beachte: (ÜA): Bessel-Fkt erfüllt Differentialgleichung
$$x^2\,y''(x) + x\,y'(x) + (x^2 - \pi^2)\,y(x) = 0 \quad (n\in\mathbb{Z})$$

Parameterintegrale

Buch Kap. 2.15

Satz 2.40: (Leibniz–Regel)

Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 2.39. Seien ferner $h(x)$ und $g(x)$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy =$$

$$= \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{d\, f(x,y)}{d\, x}\, dy + f(x,h(x))h'(x) - f(x,g(x))g'(x)\, .$$

Parameterintegrale

Buch Kap. 2.15

Beispiel

Anwendungen der Integralrechnung (Volumen und Mantelfläche von Rotationskörpern, Kurven und Bogenlänge, Kurvenintegrale)

Rotationskörper

Buch Kap. 2.14

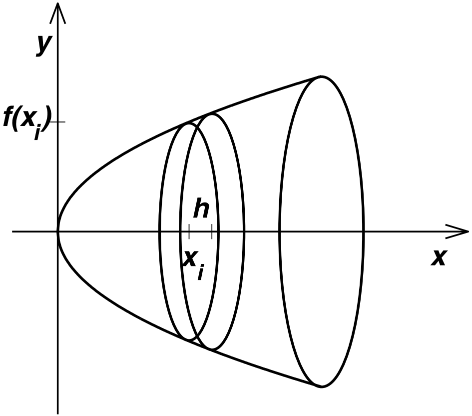


Abb. 2.61: Rotationskörper, durch $f(x)$ erzeugt

Rotationskörper

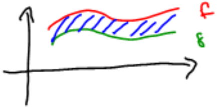
Buch Kap. 2.14

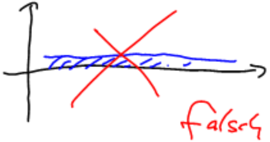
Volumen

Das Volumen des von der Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ erzeugten Rotationskörpers wird durch

$$V := \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

erklärt.





Rotationskörper

Buch Kap. 2.14

Mantelfläche

Die Oberfläche des von Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ erzeugten Rotationskörpers lässt sich durch

$$F := 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$

berechnen.

Rotationskörper

Buch Kap. 2.14

Beispiel

a) $f: [-r, r] \to \mathbb{R}_+$ $\qquad f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

$, \; f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$

$$V_{Kugel} = \pi \int_{-r}^{r} f^2(x)\,dx$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2\,dx = \pi \cdot \left(x r^2 - \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-r}^{r} \right) = \pi \cdot \frac{4}{3} r^3$$

$$F_{Kugel} = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}$$

$$\cdot \sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\,dx = 2\pi r \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = 4\pi r^2$$

Rotationskörper

Beispiel

b) $f(x) = \sqrt{x} \qquad x \in [0, 1]$

$$V = \pi \int_0^1 \sqrt{x}^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$F = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x \cdot \left(\frac{4x+1}{4x}\right)}\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 \sqrt{4x+1}\, dx \qquad y = 4x+1 \qquad \frac{dy}{dx} = 4 \Rightarrow dx = \frac{1}{4} dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^5 \sqrt{y}\, dy = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} y\sqrt{y} \Big|_1^5 = \frac{\pi}{6} \quad y\sqrt{y}\Big|_1^5$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

Kurven im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 2.12

Definition 2.30 (vergl. Def. 5.13): (Kurve im $\mathbb{R}^n$)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall.
Jede Abbildung

$$\mathbf{x} : [a, b] \to G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ heißt Kurvenstück in G mit dem Anfangspunkt $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a), \dots, x_n(a))^T$, dem Endpunkt $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b), \dots, x_n(b))^T$ und der Spur $\{\mathbf{x}(t) \,|\, a \le t \le b\}$.

Kurven im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 2.12

Fortsetzung Definition 2.30:

Ein Kurvenstück heißt regulär, falls $x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \ldots x_n'(t)^2 \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ gilt.

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$$

heißt Parameterdarstellung des Kurvenstückes mit dem Parameter t. Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken K_i, $i = 1, ..., r$, wobei der Anfangspunkt von K_i jeweils mit dem Endpunkt von K_{i-1}, $i = 2, ..., r$, übereinstimmt, heißt Kurve. Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es i. Allg. auch als Kurve bezeichnet. Dann schreiben wir (vergl. Def. 5.13)

$$\gamma(t) \equiv \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$$

Kurven im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 2.12

Beispiel

a) $x : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ $\qquad x(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$

Kreis mit Rad. r

b) $x : [0, 10\pi] \to \mathbb{R}^3$ $\qquad x(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ h \cdot t \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$

c) $x : [2, 2] \to \mathbb{R}^2$ $\qquad x(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$

„Traktix“