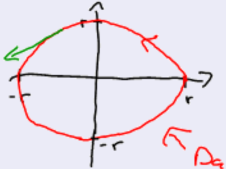
Kurven im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 2.12

Beispiel

a) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $r > 0$

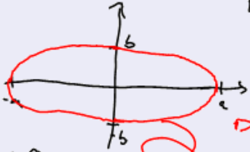
$$\gamma(t) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$



Das ist ein Kreis :)

b) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $a, b > 0$

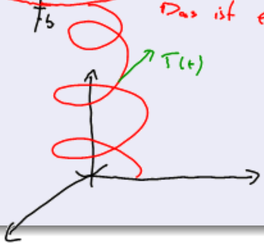
$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$$



Das ist eine Ellipse

c) $\gamma : [0, 10\pi] \to \mathbb{R}^3$, $h > 0$, $r > 0$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} ht \\ r\cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$$

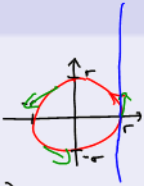


Beispiel

a) $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $r>0$

$$\gamma(t) = r\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$

$$\dot\gamma(t) = r\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$



$$\dot\gamma(0) = \begin{pmatrix}0\\ r\end{pmatrix}, \quad T(0) = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$x(\lambda) = \begin{pmatrix}r\\ 0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\\ \lambda\end{pmatrix}$$

b) $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $a,b>0$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix}a\cos t\\ b\sin t\end{pmatrix} \quad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix}-a\sin t\\ b\cos t\end{pmatrix} \quad \|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

$$= a\sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2}\cos^2 t}$$

c) $[0,10\pi] \to \mathbb{R}^3$, $h,r>0$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix}ht\\ r\cos t\\ r\sin t\end{pmatrix} \quad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix}h\\ -r\sin t\\ r\cos t\end{pmatrix}, \quad \|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{h^2+r^2}$$

Kurven im $\mathbb{R}^n$

$$\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{\dot x_1^2(t) + \ldots + \dot x_n^2(t)}$$

Buch Kap. 5.3

Defintion 5.15: (Tangentenvektor)

Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve (d.h. $\|\dot\gamma(t)\| > 0$ für alle $t \in [t_a, t_e]$). Mit

$$T(t) = \frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|} \text{ für } t \in [t_a, t_e]$$

bezeichnen wir den Tangentenvektor an die Kurve γ.
Die Gleichung der Kurventangente in $\gamma(t_0)$ lautet

$$\mathbf{x}(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda T(t) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})\ .$$

Skalare Kurvenintegrale

Buch Kap. 7.4

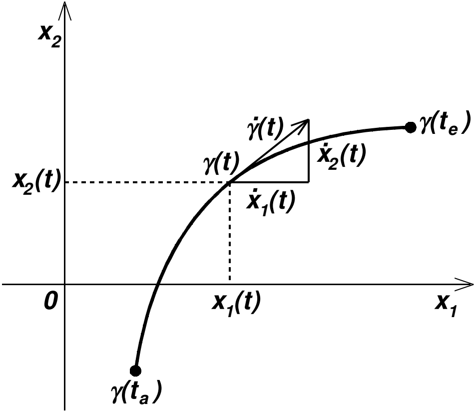


Abbildung 7.2: Bezeichnungen bei Kurven γ im $\mathbb{R}^2$

Kurven im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 2.12

Beispiel

Skalare Kurvenintegrale

Buch Kap. 7.4

Defintion 7.6 (Bogenelement einer Kurve im $\mathbb{R}^n$)

Sei $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T,\ t \in [t_a, t_e]$ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$. Dann bezeichnen wir mit

$$ds = \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \cdots + \dot{x}_n^2(t)}\, dt =: \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

das Bogenelement der Kurve (an der Stelle $\gamma(t)$).

Kurven im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 5.3

Definition 5.14: (Bogenlänge)

Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve.

$$s(t) := \int_{t_a}^{t} \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

bezeichnen wir als **Bogenlänge** des Kurvenstücks über $[t_a, t]$.

Beispiel

a) $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $r>0$

$\gamma(t) = r\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ $\quad \|\dot\gamma(t)\| = r$

$$L = s(2\pi) = \int_0^{2\pi} \underbrace{\|\dot\gamma(t)\|}_{=r}\, dt = 2\pi r$$

b) $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $a,b>0$, $\quad \gamma(t) = \begin{pmatrix}a\cos t\\ b\sin t\end{pmatrix}$ „Elliptisches Integral"

$$L = s(2\pi) = \int_0^{2\pi}\|\dot\gamma(t)\|\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2}\cos^2 t}\,dt$$ (nicht geschlossen lösbar)

c) $\gamma:[0,10\pi]\to\mathbb{R}^3$

$$L = s(10\pi) = \int_0^{10\pi}\underbrace{\|\dot\gamma(t)\|}_{\sqrt{h^2+r^2}}\,dt = 10\pi\sqrt{h^2+r^2}$$

Kurven im $\mathbb{R}^n$

Buch Kap. 2.12

Beispiel

Skalare Kurvenintegrale

Buch Kap. 7.4

Definition 7.7: (Skalares Kurvenintegral einer Funktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}$ sei auf allen Punkten einer Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt

$$\int_\gamma f \, ds := \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

skalares Kurvenintegral der Funktion f (bzw. Kurvenintegral erster Art).

Skalare Kurvenintegrale

Buch Kap. 7.4

Schritte zur Berechnung des skalaren Kurvenintegrals einer Funktion

1) Falls nicht gegeben, Parametrisierung der Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$
2) Berechnung der Funktionswerte $f(\gamma(t))$ der Belegungsfunktion
3) Berechnung von $\|\dot{\gamma}(t)\|$
4) Berechnung des Kurvenintegrals

$$\int_\gamma f\, ds = \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt.$$

Skalare Kurvenintegrale

Beispiel

inhomogener Faden im $\mathbb{R}^3$

Fadenkurve $\quad \gamma(t) \; : \; t \in [a,b] \qquad$ Einheit $[m]$

Massendichte : $\; m(\gamma(t)) \qquad \left[\frac{kg}{m}\right]$

Gesamtmasse $\quad M = \int_a^b m(\gamma(t)) \; \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt \qquad [kg]$

Skalare Kurvenintegrale

Beispiel

Skalare Kurvenintegrale

Buch Kap. 7.4

Satz 7.1:(Rechenregeln für Kurvenintegrale und Mittelwertsatz)

Sei γ eine Kurve und $f, g : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Regeln

(i) $\int_\gamma (f+g) ds = \int_\gamma f\, ds + \int_\gamma g\, ds$ (Additivität des Integrals)

(ii) $\int_\gamma \alpha f\, ds = \alpha \int_\gamma f\, ds$ (Homogenität des Integrals)

(iii) $\int_\gamma f\, ds = f(\gamma(\tau)) \cdot L$ (Mittelwertsatz)

Dabei ist L die Länge der Kurve und $\gamma(\tau)$ ein geeigneter Kurvenpunkt.

Potenzreihen und elementare Funktionen

Gleichmäßige und punktweise Konvergenz

Buch Kap. 3

Definition

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, mit $f_n : D \to \mathbb{C}$ für $D \subset \mathbb{C}^m$, eine Funktionenfolge. Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

- punktweise gegen $f : D \to \mathbb{C}$, falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z), \qquad \text{für alle } z \in D.$$

- gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$, falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Definition

Wir schreiben bei einer beschränkten Funktion $f : D \to \mathbb{R}$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in D} |f(x)|.$$