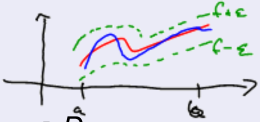
Potenzreihen und elementare Funktionen

Gleichmäßige und punktweise Konvergenz

Buch Kap. 3

Definition

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, mit $f_n : D \to \mathbb{C}$ für $D \subset \mathbb{C}^m$, eine Funktionenfolge. Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$



- **punktweise** gegen $f : D \to \mathbb{C}$, falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z), \qquad \text{für alle } z \in D.$$

- **gleichmäßig** gegen $f : D \to \mathbb{C}$, falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Definition

Wir schreiben bei einer beschränkten Funktion $f : D \to \mathbb{R}$

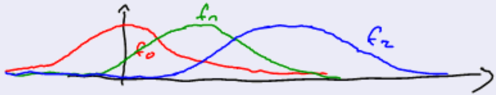
$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in D} |f(x)|.$$

Gleichmäßige und punktweise Konvergenz

Buch Kap. 3

Gleichmäßige Konvergenz

a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$



Sei $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-(x-n)^2} = 0$

(f_n) konv. als punktw. gegen $f = 0$

Ist (f_n) auch glm gegen $f=0$ konv.?

Betrachte $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} e^{-(x-n)^2} = 1$

Also gilt nicht $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$

Somit ist (f_n) nicht glm. konv.

Gleichmäßige und punktweise Konvergenz

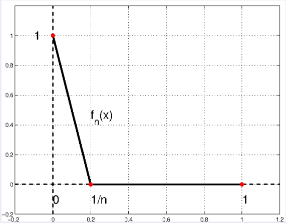
Bemerkung

Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Gegenbeispiel

Betrachte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{für } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0 & \text{für } 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$



Gleichmäßige und punktweise Konvergenz

Buch Kap. 3

Bemerkung

Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Gegenbeispiel

Die Folge konvergiert punktweise gegen die unstetige Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Allerdings konvergiert $(f_n)_n$ nicht gleichmäßig gegen f, denn es gilt

$$\|f_n - f\| = 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Gleichmäßige und punktweise Konvergenz

Buch Kap. 3

Satz

Falls eine Folge $(f_n)_n$ stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, gleichmäßig auf D gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert, so ist f stetig auf D.

~~Beweis~~ Beispiel

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f_n(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(nx)$

Es gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 : & x > 0 \\ 0 : & x = 0 \\ -1 : & x < 0 \end{cases}$

(f_n) kann also nicht glm. gegen $f = \mathrm{sign}$ konv., da sign unstetig in 0.

Satz (Majorantenkriterium von Weierstraß)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Funktionenfolge mit $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, und gelte

$$|f_n(z)| \leq b_n \text{ für alle } z \in D \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$$

für eine reelle Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dann ist die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \qquad \text{für } z \in D,$$

gleichmäßig und absolut konvergent auf D.

Gleichmäßige und punktweise Konvergenz

Folgerung

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge stetiger Funktionen mit $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, so dass

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \qquad \text{für } z \in D,$$

gleichmässig konvergiert auf D. Dann ist f stetig auf D.

Beispiel

$a > 0$

$f_n : [0, a] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$

Frage: Ist $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ glm konv.?

Es gilt $|f_n(x)| \leq \frac{a^n}{n!}$ $\forall x \in [0, a]$

Weiter gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ konv.

Also konv. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ glm. und absolut auf $[0, a]$

gegen exp.

Vertauschbarkeit Differentiation und Summation

Satz

Sei $(f_n)_n$ eine Folge differenzierbarer Funktionen $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{und} \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x), \qquad \text{für } x \in (a, b),$$

gleichmäßig konvergent auf (a, b) sind. Dann ist die Funktion f differenzierbar auf (a, b), und es gilt $f' = g$, d.h.

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \qquad \text{für alle } x \in (a, b).$$

Beispiel

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ auf $[0,a]$, $a>0$

$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. $\quad f_0'(x) = 0$

$n>0: f_n'(x) = \frac{n x^{n-1}}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f_{n-1}(x)$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$

Es gilt also $\exp'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \exp(x)$

Vertauschbarkeit Differentiation und Summation

Beispiel

Vertauschbarkeit Differentiation und Summation

Beispiel

Potenzreihen

Definition

Eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

heißt (komplexe) Potenzreihe zum Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$.

Beispiel

Die (komplexe) Exponentialfunktion ist definiert durch die Potenzreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Weiterhin: Elementare Funktionen sind über Potenzreihen definiert:

$$\log(z), \cos(z), \sin(z), \ldots$$

Taylor-Reihenentwicklung

Betrachte für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$, die Taylor-Reihe

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad \text{mit } x_0, x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkungen

- Die Taylor-Reihe einer C^∞-Funktion ist im Allgemeinen nicht konvergent.
- Konvergiert die Taylor-Reihe $T(x)$, so nicht notwendigerweise gegen $f(x)$.
- Falls

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

so nennt man die Funktion f reell-analytisch.

Beispiele

a) $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist analytisch

b) $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 = 0$

$\sin' = \cos$, $\sin'' = -\sin$, $\sin''' = -\cos$, $\sin^{(4)} = \sin$, ...

$T_n(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$ bis maximal n

$|R_n(x)| = \frac{|\sin^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x|^n$ für ein ξ zw. 0 und x

$= \frac{|\sin/\cos(\xi)|}{(n+1)!} |x|^n \leq \frac{|x|^n}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$|\sin(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Rightarrow \sin(x) = T(x)$

Taylor-Reihenentwicklung

Beispiele

$$\sin(x) = T(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ „Sinusreihe"

Analog: $$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Taylor-Reihenentwicklung

Buch Kap. 3

Beispiele

Dann gilt $\log(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$

$\log(x)$, $x_0 = 1$,

$\log'(x) = \frac{1}{x}$, $\log''(x) = \frac{-1}{x^2}$, $\log'''(x) = \frac{2}{x^3}$

$\log^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4}$, ..., $\log^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x^n} \cdot (-1)^{n+1}$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\log^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\log^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)! \, (-1)^{k+1}}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$$

$|R_n(x)| = \left| \frac{\log^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-1)^{n+1} \right|$ für ein ξ zw. x und 1.

$= \left| \frac{(-1)^n \, n!}{(n+1)!} (x-1)^{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} |x-1|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, wenn $|x-1| < 1$