Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Dr. K. Rothe

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 1

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0\,, \\ 1 - x^2 & \text{für } x < 0\,. \end{cases}$$

Ist der Mittelwertsatz

$$g'(x_0) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \quad \text{mit} \quad x_0 \in]a, b[$$

für $a = -1$ und $b = 1$ auf f anwendbar?

Man bestimme gegebenenfalls eine Zwischenstelle x_0.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0\,, \\ 1 - x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geq 0, \\ -2x & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad .$$

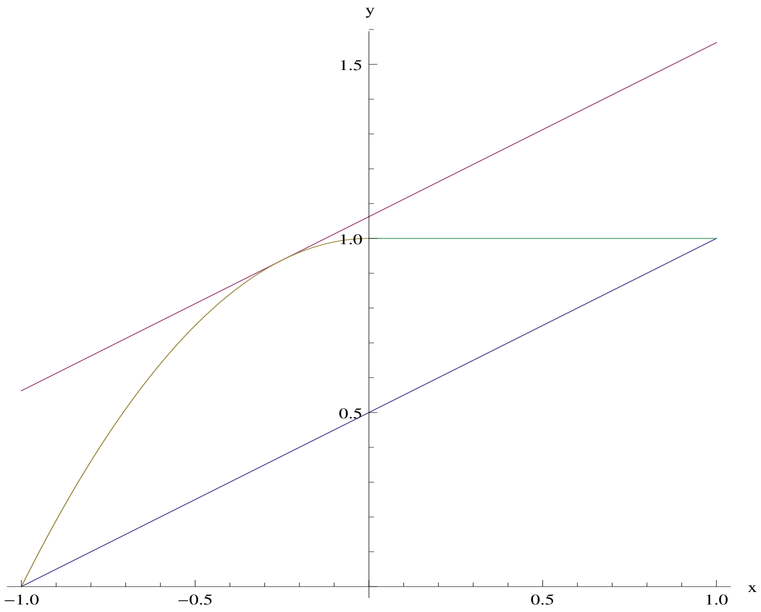

Bild 1 $f(x)$ mit Tangente in $x_0 = -\frac{1}{4}$ und Sekante für $a = -1$ und $b = 1$

Da f stetig differenzierbar ist,

sind die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllt und

es lässt sich eine Zwischenstelle $x_0 \in \,]-1, 1[$ berechnen:

$$f'(x_0) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - (1 - (-1)^2)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad -2x_0 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_0 = -\frac{1}{4}.$$

Aufgabe 2:

Für die folgenden Funktionen

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f(x)$$

bestimme man mit Hilfe des Mittelwertsatzes eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, so dass für beliebige $x_1, x_2 \in [a, b]$ gilt

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le L|x_2 - x_1|$$

und überprüfe, ob $f([a, b]) \subset [a, b]$ gilt:

Aus dem Mittelwertsatz erhält man mit $x_0 \in]a, b[$

$$|f(b) - f(a)| = |f'(x_0)| \cdot |b - a| \le \underbrace{\max_{x \in [a,b]} |f'(x)|}_{=:L} \cdot |b - a| \; .$$

a) $[a,b] = [0,1]$ und $f_1(x) = \cosh(x) - 1$,

$$L = \max_{x\in[0,1]} |f_1'(x)| = \max_{x\in[0,1]} |\sinh x| = \sinh 1 = 1.1752....$$

$f_1'(x) = \sinh(x) \geq 0$: $\quad f_1$ monoton wachsend

$$f_{1,\min} = f_1(0) = 0\,, \quad f_{1,\max} = f_1(1) = 0.543...$$

Man erhält

$$f_1([0,1]) = [f_1(0), f_1(1)] = [0, 0.543...] \subset [0,1]\,.$$

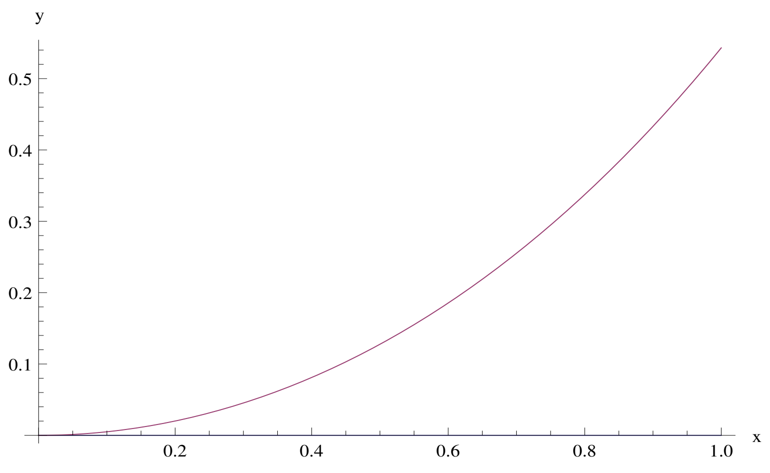

Bild 2 a) $\quad f_1(x) = \cosh(x) - 1$

b) $[a,b] = [-3,-1]$ und $f_2(x) = (x+2)^2 - 4$.

$$L = \max_{x\in[-3,-1]} |f_2'(x)| = \max_{x\in[-3,-1]} |2(x+2)| = 2.$$

Scheitelpunktform $f_2(x) = (x+2)^2 - 4$:

$f_{2,\min} = f_2(-2) = -4, \quad f_{2,\max} = f_2(-3) = -3 = f_2(-1)$

Damit ergibt sich

$$f_2([-3,-1]) = [f_2(-2), f_2(-1)] = [-4,-3] \not\subset [-3,-1]\,.$$

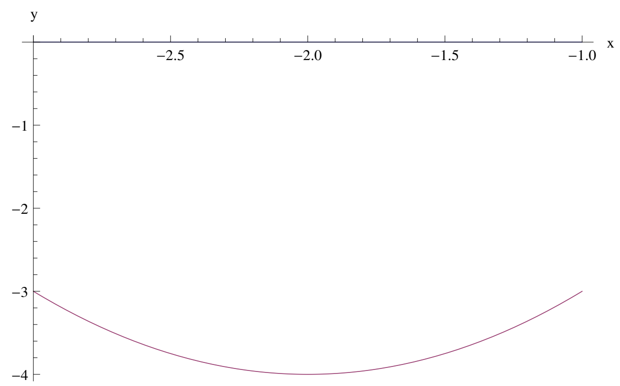

Bild 2 b) $f_2(x) = (x+2)^2 - 4$

Aufgabe 3:

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{5}{2-3x}$ definierte Funktion.

a) Man zeichne die Funktion f.

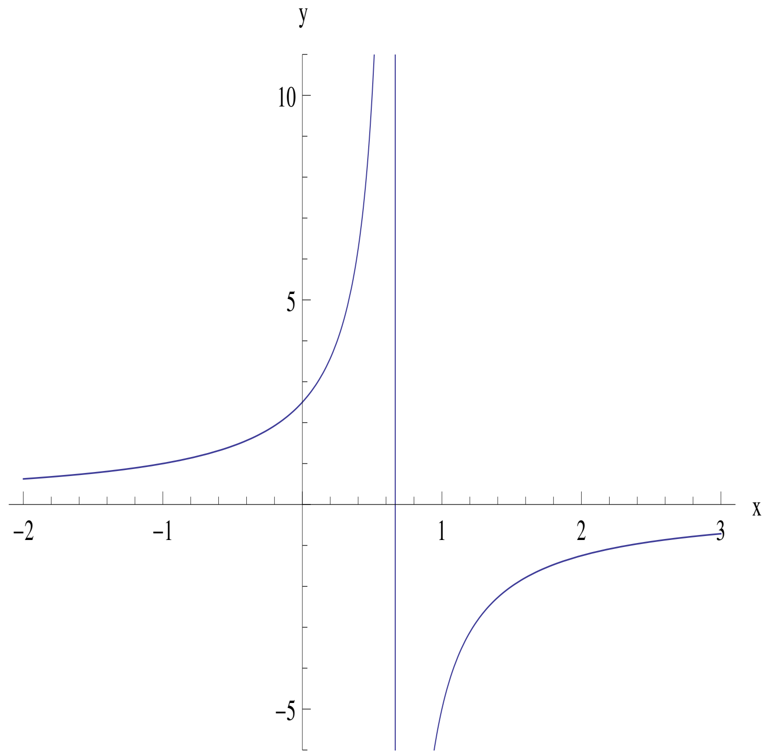

Bild 3 $f(x) = \dfrac{5}{2-3x}$

b) Man beweise durch vollständige Induktion, dass für $k \geq 0$ gilt

$$f^{(k)}(x) = \frac{5 \cdot 3^k \cdot k!}{(2-3x)^{k+1}} \,.$$

$k = 0$: $\quad \dfrac{5 \cdot 3^0 \cdot 0!}{(2-3x)^{0+1}} = \dfrac{5}{2-3x} = f(x) = f^{(0)}(x)$

$k \to k+1$:

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' \\
&= \left(\frac{5 \cdot 3^k \cdot k!}{(2-3x)^{k+1}}\right)' \\
&= \frac{5 \cdot 3^k \cdot k! \cdot (-3) \cdot (-(k+1))}{(2-3x)^{k+2}} \\
&= \frac{5 \cdot 3^{k+1} \cdot (k+1)!}{(2-3x)^{k+2}}
\end{aligned}$$

c) Man berechne die Taylor-Reihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

$$f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5 \cdot 3^k \cdot k!}{(2 - 3/3)^{k+1}} = 5 \cdot 3^k \cdot k!$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1/3)}{k!}\,\left(x - \frac{1}{3}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot 3^k \left(x - \frac{1}{3}\right)^k$$

d) Man untersuche die Konvergenz der Taylor-Reihe in den Punkten $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = \frac{2}{3}$.

Konvergenz für $x_1 = \frac{1}{2}$ über die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 5{\cdot}3^k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^k = 5 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 5{\cdot}\frac{1}{1-1/2} = 10 = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

In $x_2 = \frac{2}{3}$ liegt Divergenz vor, denn

$$\sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot 3^k \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 5 \cdot 3^k \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 5$$

erfüllt die notwendige Konvergenzbedingung nicht:

$$\lim_{k\to\infty} 5 \neq 0.$$

Bemerkung: $x_2 = \frac{2}{3}$ ist Polstelle 1.Ordnung von f.

Aufgabe 4:

Aus einem kreisförmigen Stück Pappe vom Radius R

wird ein Sektor mit dem Winkel α herausgeschnitten.

Dieser Kreissektor wird an den Schnittflächen so zusammengeklebt, so dass ein Kegel entsteht.

Für welchen Winkel α besitzt dieser Kegel maximales Volumen?

Man berechne dieses Maximalvolumen.

Lösung:

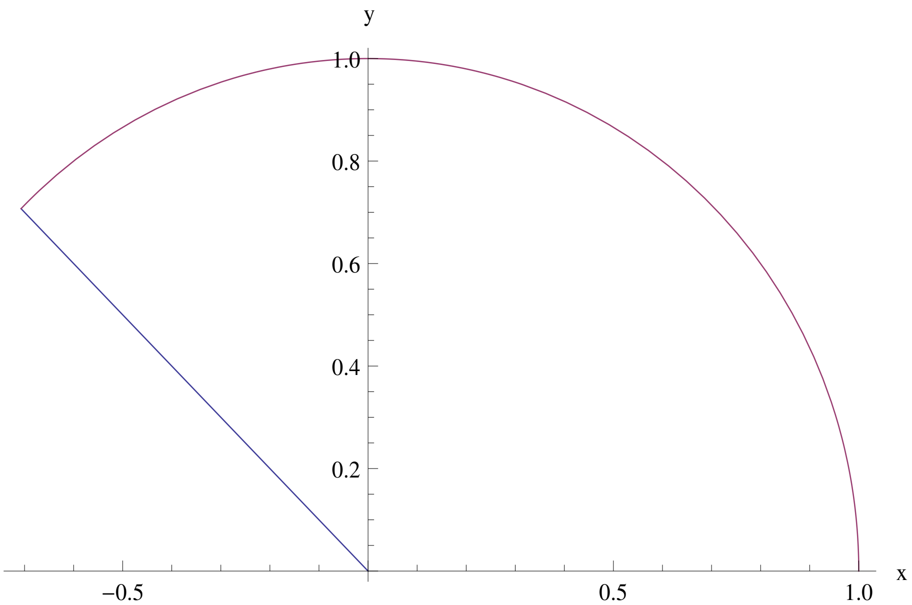

Bild 4 a) Kreissektor mit $R = 1$

Für den Umfang des Kegelbodenkreises mit Radius r gilt:

$$2\pi r = \alpha R \quad \Rightarrow \quad r(\alpha) = \frac{\alpha R}{2\pi}\,.$$

Pythagoras: Kegelmantellinie$= R$, Kegelhöhe h:

$$h^2 + r^2 = R^2$$

Kegelhöhe h:

$$h(\alpha) = \sqrt{R^2 - r^2(\alpha)} = \sqrt{R^2 - \frac{\alpha^2 R^2}{(2\pi)^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{(2\pi)^2 - \alpha^2}\,.$$

Kegelvolumen:

$$\begin{aligned} V(\alpha) &= \frac{\pi r^2(\alpha) h(\alpha)}{3} = \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3} \cdot \alpha^2 \sqrt{(2\pi)^2 - \alpha^2} \\ &= \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3} \cdot \sqrt{(2\pi)^2 \alpha^4 - \alpha^6} \geq 0\,. \end{aligned}$$

Per Konstruktion gilt $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

In den Randpunkten des Definitionsbereichs

$$\alpha_0 = 0 \text{ und } \alpha_2 = 2\pi$$

liegen offenbar Minima vor:

$$V(0) = 0 = V\left(2\pi\right)\,.$$

Die Extremalkandidaten im Inneren ergeben sich aus:

$$\begin{aligned}
V'(\alpha) &= \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3}\cdot\frac{4(2\pi)^2\alpha^3-6\alpha^5}{2\sqrt{(2\pi)^2\alpha^4-\alpha^6}}\\
&= \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3}\cdot\frac{\alpha(2(2\pi)^2-3\alpha^2)}{\sqrt{(2\pi)^2-\alpha^2}}\begin{cases} >0 \ , \ 0<\alpha<2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\\ =0 \ , \ \alpha_1=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\\ <0 \ , \ 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}<\alpha<2\pi \ .\end{cases}
\end{aligned}$$

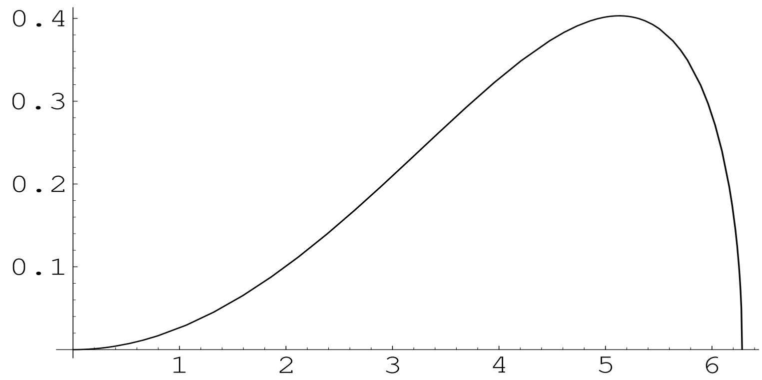

Bild 4 b) $V(\alpha)$ mit $R=1$

maximales Volumen für $\alpha_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} = 5.130199321..$ mit

$$\begin{aligned}
V\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right) &= \frac{\pi R^3}{3(2\pi)^3}\cdot\frac{2(2\pi)^2}{3}\sqrt{(2\pi)^2-\frac{2(2\pi)^2}{3}}\\
&= \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}} \approx 0.403066525R^3
\end{aligned}$$