Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Dr. K. Rothe

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 3

Satz: Differentiation einer Potenzreihe

Die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ ist im Inneren des Konvergenzintervalls, also für $x_0 - r < x < x_0 + r$ mit $r > 0$ beliebig oft differenzierbar.

Die Ableitungen ergeben sich durch gliedweises differenzieren:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}\,,$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x-x_0)^{k-2}\,, \ldots$$

Die abgeleiteten Reihen besitzen den gleichen Konvergenzradius wie f.

Aufgabe 9:

a) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe für die durch $f(z) = \dfrac{6}{5-4z}$ definierte Funktion zum Entwicklungspunkt z_0 und bestimme deren Konvergenzradius für $z_0 = \dfrac{3i}{4}$.

$$\begin{aligned}
\frac{6}{5-4z} &= \frac{6}{5-4z_0+4z_0-4z} \\
&= \frac{6}{5-4z_0} \cdot \frac{1}{1-\left(\dfrac{4(z-z_0)}{5-4z_0}\right)} \\
&= \frac{6}{5-4z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4(z-z_0)}{5-4z_0}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6 \cdot 4^k}{(5-4z_0)^{k+1}} (z-z_0)^k
\end{aligned}$$

Berechnung des Konvergenzradius:

$$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{6 \cdot 4^k (5-4z_0)^{k+2}}{6 \cdot 4^{k+1}(5-4z_0)^{k+1}}\right| = \left|\frac{5-4z_0}{4}\right|$$

Die Konvergenzbedingung der geometrischen Reihe wird bestätigt:

$$\left|\frac{4(z-z_0)}{5-4z_0}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |z-z_0| < \left|\frac{5-4z_0}{4}\right| = \left|\frac{5}{4} - z_0\right| = r$$

Man beachte: $x = \dfrac{5}{4}$ ist Polstelle von f.

Konvergenzradius für $z_0 = \dfrac{3i}{4}$:

$$r = \left|\frac{5}{4} - \frac{3i}{4}\right| = \left|\frac{5-3i}{4}\right| = \frac{\sqrt{34}}{4}.$$

b) Man berechne die Potenzreihe von

$$g(x) = \frac{1}{(5-4x)^2}$$

zum Entwicklungspunkt x_0 und bestimme den zugehörigen Konvergenzradius.

Aus $\quad f'(x) = \left(\frac{6}{5-4x}\right)' = \frac{24}{(5-4x)^2}$

folgt $\quad g(x) = \frac{1}{(5-4x)^2} = \frac{f'(x)}{24}.$

Potenzreihe von g durch differenzierte Potenzreihe von f:

$$g(x) = \frac{1}{24}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{6\cdot 4^k}{(5-4x_0)^{k+1}}(x-x_0)^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\cdot 4^{k-1}}{(5-4x_0)^{k+1}}(x-x_0)^{k-1}.$$

Der Konvergenzradius stimmt mit dem von f überein:

$$r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k\cdot 4^{k-1}(5-4x_0)^{k+2}}{(5-4x_0)^{k+1}(k+1)4^k}\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k(5-4x_0)}{(k+1)4}\right| = \left|\frac{(5-4x_0)}{4}\right| \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k}{k+1}\right| = \left|\frac{5-4x_0}{4}\right|$$

Cauchy-Produkt

Für zwei Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

mit den Konvergenzradien $r_1, r_2 > 0$ gilt

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} d_j a_{k-j} \right) z^k$$

für $|z| < \min(r_1, r_2)$.

Satz:

Die Potenzreihe $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ besitze den Konvergenzradius $R > 0$ und es gelte $g(0) = a_0 \neq 0$, dann besitzt die Funktion $f = 1/g$ eine Potenzreihe

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$$

mit einem Konvergenzradius $r > 0$. Die Berechnung der Koeffizienten d_k erfolgt über das Cauchy-Produkt

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k \right) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} d_j a_{k-j} \right) z^k$$

mit Koeffizientenvergleich und führt auf die Rekursionsformel:

$$d_0 = \frac{1}{a_0}\,, \quad d_k = -\frac{1}{a_0} \sum_{j=0}^{k-1} d_j a_{k-j}\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Aufgabe 10:

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{6}{5-4x}$ definierte Funktion.

Man bestimme die Glieder der Potenzreihenentwicklung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ über die Rekursionsformel aus dem Cauchy-Produkt von Reihen, sowie den zugehörigen Konvergenzradius.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\frac{6}{5-4x} &= f(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \cdots \quad \Rightarrow \\
6 &= (5-4x)(d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \cdots) \\
&= 5d_0 + (5d_1 - 4d_0)x + (5d_2 - 4d_1)x^2 \\
&\quad + (5d_3 - 4d_2)x^3 + \cdots + (5d_k - 4d_{k-1})x^k + \cdots
\end{aligned}
$$

Koeffizientenvergleich:

$$\Rightarrow\ 6 = 5d_0 \qquad , \qquad 0 = 5d_k - 4d_{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad d_0 = \frac{6}{5} \quad , \quad d_k = \frac{4}{5} d_{k-1} = \cdots = \left(\frac{4}{5}\right)^k d_0 = \frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k x^k$$

Konvergenzradius:

$$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{d_k}{d_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k}{\frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k+1}}\right| = \frac{5}{4}$$

Alternativrechnung mit den Formelauswertungen aus dem Skript (Methode identisch):

$$f(x) = \frac{6}{5-4x} = \frac{1}{\frac{5}{6} - \frac{4}{6}x} =: \frac{1}{g(x)}$$

Da $g(0) \neq 0$, besitzt f in $x_0 = 0$ eine Potenzreihenentwicklung

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$$

mit Konvergenzradius $r > 0$ und die Koeffizienten d_k lassen sich nach der Rekursionsformel aus dem Cauchy-Produkt berechnen:

$$a_0 d_0 = 1\,, \quad a_0 d_k = -\sum_{j=0}^{k-1} d_j a_{k-j}$$

mit

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{5}{6} - \frac{4}{6}x$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = \frac{5}{6}\,, \quad a_1 = -\frac{4}{6}\,, \quad a_k = 0\,,\ k \geq 2\,.$$

Man erhält damit $\quad d_0 = \dfrac{1}{a_0} = \dfrac{6}{5}\,,$

$$d_k = -\frac{1}{a_0}\sum_{j=0}^{k-1} d_j a_{k-j} = -\frac{a_1}{a_0} d_{k-1} = \frac{4}{5} d_{k-1} \cdots = \left(\frac{4}{5}\right)^k d_0 = \frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k$$

Aufgabe 11:

Man berechne die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = y$$

mit dem Anfangswert $y(0) = 3$ in folgender Potenzreihendarstellung

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k .$$

Lösung:

Potenzreihe gliedweise differenzieren und einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ \Rightarrow \quad & \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{k+1}(k+1) - a_k) x^k = 0 \,. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich mit der Nullfunktion ergibt Rekursionsformel für a_k:

$$a_{k+1}(k+1) - a_k = 0 \quad \Rightarrow$$

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{k+1} = \frac{a_{k-1}}{(k+1)k} = \cdots = \frac{a_0}{(k+1)!} \, .$$

Der Anfangswert ergibt

$$y(0) = a_0 = 3 \Rightarrow a_k = \frac{3}{k!}$$

und damit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{k!} x^k = 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 3e^x$$

als Lösung der Differentialgleichung.

Der Konvergenzradius berechnet sich durch

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{3(k+1)!}{3 \cdot k!} \right| = \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty \, .$$

Elementare Funktionen

Die **Binomialreihe** für $a \in \mathbb{R}$ und $x \in]-1,1[$ lautet:

$$(1+x)^a = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{a}{m} x^k$$

mit den **Binomialkoeffizienten**:

$$\binom{a}{m} := \frac{\prod\limits_{j=0}^{m-1}(a-j)}{m!}\,, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

Satz: Integration einer Potenzreihe

Die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ besitzt im Inneren des Konvergenzintervalls, also für $x_0 - r < x < x_0 + r$ mit $r > 0$ eine **Stammfunktion** F, d.h. es gilt $F' = f$.

Durch gliedweises Integrieren erhält man:

$$F(x) = C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Die Stammfunktion F besitzen den gleichen Konvergenzradius wie f.

Abelscher Grenzwertsatz:

Besitzt die reelle Potenzreihe

$$g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

den endlichen Konvergenzradius $r > 0$ und konvergiert sie im rechten Randpunkt $x_0 + r$, so ist die Summenfunktion $g(x)$ in $x_0 + r$ (linksseitig) stetig, d.h. es gilt

$$\lim_{x \nearrow x_0 + r} g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k.$$

Entsprechendes gilt für den linken Randpunkt $x_0 - r$.

Aufgabe 12:

a) (i) Man berechne die Ableitung von

$$f(x) = \ln(2 + x)$$

und damit die Potenzreihe von

$$\ln(2 + x)$$

zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.

Unter Benutzung der geometrischen Reihe erhält man für $|x/2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$

$$f'(x) = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - (-(x/2))} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n .$$

die Potenzreihe von f' mit dem Konvergenzradius $r = 2$.

Gliedweise Integration der Reihe liefert wegen $f(0) = \ln(2)$ die Potenzreihe von f

$$\begin{aligned} f(x) = \ln(2 + x) &= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}} x^{n+1} \\ &= \ln(2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}} x^{n+1} . \end{aligned}$$

(ii) Konvergenzverhalten in den Randpunkten:

Der Randpunkt $x = -2$ führt auf die harmonische Reihe

$$\ln(2) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

und man erhält Divergenz.

Der Randpunkt $x = 2$ ergibt die alternierenden harmonischen Reihe

$$\ln(2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

und man erhält Konvergenz.

Konvergiert eine Potenzreihe in den Randpunkten,
so ergibt sich nach dem Abelschen Grenzwertsatz dort
der Wert der stetigen Fortsetzung der Summenfunktion im Inneren.

Man erhält also im Randpunkt $x = 2$ den Wert

$$\ln(4) = \ln(2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \left(\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2) \right) .$$

b) Man berechne die Potenzreihe für die durch

$$g(x) = \sqrt[3]{8+3x} = 2\left(1+\frac{3x}{8}\right)^{1/3}$$

gegebene Funktion zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.

Potenzreihenbestimmung über die Binomialreihe für

$$-1 < \frac{3x}{8} < 1 \Leftrightarrow -\frac{8}{3} < x < \frac{8}{3} \Leftrightarrow |x| < \frac{8}{3} = r$$

$$2\left(1+\frac{3x}{8}\right)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} 2\binom{1/3}{n}\left(\frac{3x}{8}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{1/3}{n}\frac{2\cdot 3^n}{8^n}}_{=a_n} x^n \, .$$

Der Konvergenzradius $r = \dfrac{8}{3}$ bestätigt sich auch rechnerisch

mit $\displaystyle\binom{1/3}{n} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}-k\right)$ erhält man:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\begin{pmatrix} 1/3 \\ n \end{pmatrix} \dfrac{2\cdot 3^n}{8^n}}{\begin{pmatrix} 1/3 \\ n+1 \end{pmatrix} \dfrac{2\cdot 3^{n+1}}{8^{n+1}}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{3} \cdot \left| \frac{\dfrac{1}{n!} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3} - k \right)}{\dfrac{1}{(n+1)!} \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3} - k \right)} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8(n+1)}{3} \cdot \left| \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3} - k \right)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3} - k \right)} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{3} \cdot \frac{n+1}{n-1/3} = \frac{8}{3}\,.$$