

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 5:

Gegeben sei die durch $\Phi(x) = e^{-x^2}$ definierte Funktion.

- Man zeige, dass Φ genau einen Fixpunkt x^* besitzt.
- Man gebe ein Intervall D an, in dem die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

für jeden Startwert $x_0 \in D$ auf Grund des Fixpunktsatzes gegen x^* konvergiert.

Wieviele Iterationsschritte n werden nach der a priori-Abschätzung für eine Genauigkeit von $|x_n - x^*| < 10^{-3}$ höchstens benötigt?

- Man berechne den Fixpunkt mit einem absoluten Fehler von $|x_n - x^*| < 10^{-3}$.

Aufgabe 6:

Man untersuche die Funktionenfolgen

$$\text{a) } f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^{2n}}{2 + x^{2n}}, \quad \text{b) } g_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{n}{n + 1 + nx^2}$$

auf Konvergenz und unterscheide gegebenenfalls punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 7:

Man bestimme für folgende Funktionenreihen den maximalen Konvergenzbereich und untersuche welche Art von Konvergenz (punktweise, gleichmäßige) vorliegt.

$$(i) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt{x})^k}, \quad (ii) \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2}.$$

Aufgabe 8:

- a) Für folgende Potenzreihen bestimme man den Entwicklungspunkt und berechne den Konvergenzradius.

$$(i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{7^n(n+1)} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n, \quad (ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9n+2}{5n+1}\right)^n (x+3)^n.$$

- b) Man bestimme den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n+1} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls (mit Begründung).

Abgabetermin: 23.4. - 26.4.19 (zu Beginn der Übung)