Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Armin Iske
Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg
Sommersemester 2019

Literaturquellen.

PRIMÄR:

- R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar:
  Mathematik für Ingenieure 1,
  4., erweiterte Auflage. WILEY-VCH, Berlin, September 2010.

- R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar:
  Aufgaben und Lösungen zu Mathematik für Ingenieure 1,
  4., erweiterte Auflage. WILEY-VCH, Berlin, September 2010.

SEKUNDÄR:

- K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik, Bände 1 und 2.
  Springer, Berlin.

- K. Burg, H. Haf, F. Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure,
  Band 1: Analysis. B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

Inhalte Analysis II.

- Fixpunkt-Iteration.
- Gleichmäßige Konvergenz.
- Potenzreihen.
- Elementare Funktionen.
- Interpolation.
- Integration.
- Kurven und Kurvenintegrale.
- Numerische Quadratur.
- Extrapolation.
- Periodische Funktionen, Fourier-Reihen.
- Schnelle Fourier-Transformation (FFT).

7 Fixpunkt-Iteration

Ziel: Iterative Lösung der (nichtlinearen) Gleichung $f(x) = 0$.

Möglichkeiten:

- Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung)
- Newton-Verfahren,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

Iteratives Verfahren: Fixpunkt-Iteration mit stetiger Verfahrensfunktion Φ und Startwert x_0 , so dass

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit Grenzwert

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_k) = \Phi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \Phi(x^*).$$

Grundidee der Fixpunkt-Iteration.

Löse statt $f(x) = 0$ das `Fixpunkt-Problem`

$$x = \Phi(x)$$

mit der `Fixpunkt-Iteration`

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Beispiel: `Newton-Iteration`. Hierbei ist

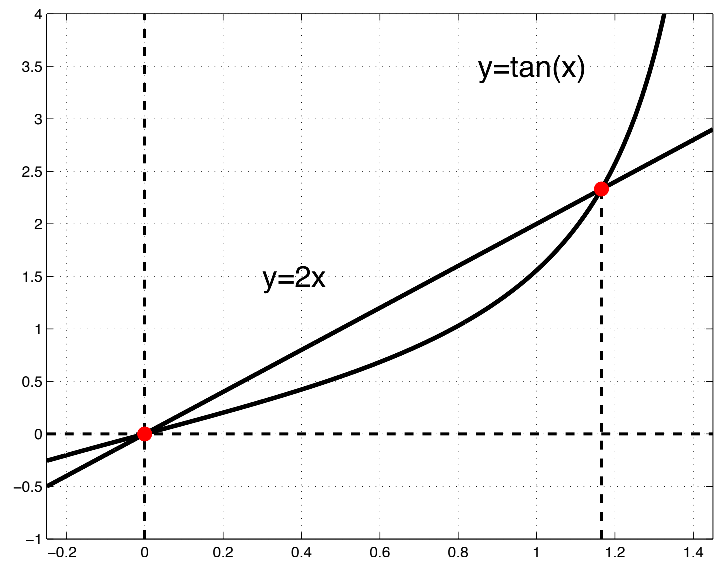
$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

ABER: Verfahrensfunktion Φ ist im Allgemeinen nicht eindeutig!

Beispiel.

Suche im Intervall $(0, \pi/2)$ die (eindeutige) Nullstelle von

$$f(x) = 2x - \tan(x).$$



Lösungsmöglichkeiten:

- Iteration mit $x = \frac{1}{2}\tan x = \Phi_1(x)$
- Iteration mit $x = \arctan(2x) = \Phi_2(x)$

Ergebnisse der beiden Fixpunkt-Iterationen.

- Betrachte Iterationen

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\tan(x_k) \quad \text{und} \quad y_{k+1} = \arctan(2y_k)$$

- Wähle als Anfangsnäherung in beiden Iterationen

$$x_0 = 1.2 \quad \text{und} \quad y_0 = 1.2$$

- Beide Iterationen konvergieren im Grenzwert für $k \to \infty$, aber

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} y_k = 1.1655\,61185$$

- Berechne die Iterationen mittels eines Computerprogramms

Bemerkung: Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt ab vom Abstand

$$|x_{k+1} - x_k|$$

zweier benachbarter Folgenglieder.

Definition: *Sei* $(V, \|\cdot\|)$ *ein normierter Vektorraum. Eine Abbildung* $\Phi : D \to V$, $D \subset V$, *heißt* Lipschitz-stetig *auf* D, *falls eine Konstante* L *existiert, so dass*

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \qquad \text{für alle } x, y \in D.$$

Die Konstante L *nennt man* Lipschitz-Konstante. □

Definition: *Eine Abbildung* $\Phi : D \to V$, $D \subset V$, *heißt* kontrahierend, *falls* Φ *Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante* $L < 1$. *Man nennt in diesem Fall* L *die* Kontraktionskonstante *von* Φ. □

Bemerkungen:

- Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig.
- Falls die Abschätzung

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \|x - y\| \qquad \text{für alle } x \neq y$$

  gilt, so ist Φ nicht notwendigerweise kontrahierend. □

Beispiel: Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$ mit $L = 1$.

Satz: *Jede* C^1*-Funktion* $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ist Lipschitz-stetig auf* $[a,b]$ *mit der Lipschitz-Konstanten*

$$L = \sup\{|\Phi'(x)| \;:\; a \le x \le b\}.$$

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)|\,|x-y| \le L\,|x-y| \qquad \text{für alle } x, y \in [a,b].$$

$\blacksquare$

Beispiele:

- Die Sinusfunktion $\sin(x)$ ist Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$ mit $L = 1$.
- Der Logarithmus $\log(x)$ ist Lipschitz-stetig auf $[1,\infty)$ mit $L = 1$.
- Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist Lipschitz-stetig auf $(-\infty, 0]$ mit $L = 1$.
- Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist **nicht** Lipschitz-stetig auf $[0,\infty)$.

Satz (Banachscher Fixpunktsatz):
Sei $(V, \|\cdot\|)$ *ein vollständiger normierter Raum (Banachraum). Weiterhin sei* $D \subset V$, $D \neq \emptyset$, *abgeschlossen und* $\Phi : D \longrightarrow D$ *eine kontrahierende Abbildung mit Kontraktionskonstante* $L < 1$. *Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Es gibt genau einen* Fixpunkt x^* *von* Φ *in* D, *d.h.* $\Phi(x^*) = x^*$;

(b) *Für jeden Startwert* $x_0 \in D$ *konvergiert die* Fixpunkt-Iteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

gegen den Fixpunkt x^*;

(c) *Es gilt die* a priori-Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\|;$$

und die a posteriori-Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_n - x_{n-1}\|.$$

Beweis: **(b):** Sei $x_0 \in D$ beliebig. Dann gilt $x_k = \Phi(x_{k-1}) \in D$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit ist $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in D, wobei gilt

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})\| \leq L\|x_k - x_{k-1}\|.$$

und somit

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq L^{k+1-n}\|x_n - x_{n-1}\| \qquad \text{für } k \geq n.$$

Für $m \geq n \geq k$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\| &= \|(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \ldots + (x_{n+1} - x_n)\| \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \left(\sum_{k=n}^{m-1} L^{k+1-n}\right) \|x_n - x_{n-1}\| \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} L^j\right) \|x_n - x_{n-1}\| = \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\|.
\end{aligned}$$

Weiterhin

$$\|x_m - x_n\| \le \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\| \le \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|.$$

womit

$$\lim_{n\to\infty} \|x_m - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\| = 0.$$

$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist Cauchy-Folge mit Grenzwert $x^* \in D$, d.h. $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$.

Wegen der Stetigkeit von Φ und mit $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ folgt daraus $x^* = \Phi(x^*)$.

(a): Angenommen, es gäbe einen weiteren Fixpunkt $x^{**} \in D$, mit $x^* \neq x^{**}$. Dann folgt der Widerspruch

$$\|x^{**} - x^*\| = \|\Phi(x^{**}) - \Phi(x^*)\| \le L\|x^{**} - x^*\| < \|x^{**} - x^*\|.$$

(c): Folgt sofort mit

$$\|x^* - x_n\| = \lim_{m\to\infty} \|x_m - x_n\| \le \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\| \le \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|.$$

■

Beispiel. Berechne Fixpunkt von $\Phi(x) = 0.1 \cdot \exp(x)$ auf $D = [-1, 1]$.

Überprüfe zunächst die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes:

- D ist nichtleer und abgeschlossen;
- es gilt $0 < \Phi(x) \leq 0.1 \cdot e < 1$ und somit $\Phi(D) \subset D$;
- es gilt $|\Phi'(x)| = \Phi(x) \leq e/10 < 1$ für alle $x \in D$;
- somit ist Φ kontrahierend auf D mit $L = e/10 < 1$.

Damit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Berechne nun den Fixpunkt $x^* \in D$ von Φ mit der Iteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.

Setze $x_0 = 1$. Dann bekommt man $x_1 = 0.2718281828\ldots$, und es gilt

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|.$$

Für $\varepsilon = 10^{-6}$ bekommt man damit

$$|x_n - x^*| < \varepsilon \qquad \text{für } n \geq 11.$$

8 Potenzreihen und elementare Funktionen

8.1 Gleichmäßige Konvergenz

Definition: *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, *mit* $f_n : D \to \mathbb{C}$ *für* $D \subset \mathbb{C}^m$, *eine Funktionenfolge. Dann konvergiert die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

- punktweise *gegen* $f : D \to \mathbb{C}$, *falls gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z), \qquad \text{für alle } z \in D.$$

- gleichmäßig *gegen* $f : D \to \mathbb{C}$, *falls gilt*

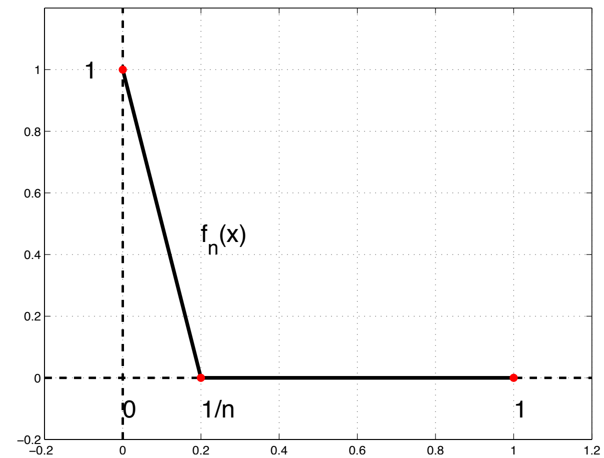
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

□

Bemerkung: Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. □

Gegenbeispiel. Betrachte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{für } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0 & \text{für } 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$



Der Graph von $f_n(x)$.

Die Folge konvergiert *punktweise* gegen die *unstetige* Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Allerdings konvergiert $(f_n)_n$ *nicht* gleichmäßig gegen f, denn es gilt

$$\|f_n - f\|_\infty = 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Satz: *Falls eine Folge* $(f_n)_n$ *stetiger Funktionen* $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, *gleichmäßig auf* D *gegen* $f : D \to \mathbb{C}$ *konvergiert, so ist* f *stetig auf* D.

Beweis: Zeige die Stetigkeit von f in $z_0 \in D$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben und n hinreichend groß, so dass

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/3.$$

Wähle $\delta > 0$ hinreichend klein, so dass

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \varepsilon/3 \qquad \text{für alle } \|z - z_0\| < \delta.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $z \in D$ mit $\|z - z_0\| < \delta$. ∎

Das Majorantenkriterium von Weierstraß.

Satz: *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine Funktionenfolge mit* $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, *und gelte*

$$|f_n(z)| \leq b_n \text{ für alle } z \in D \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$$

für eine reelle Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. *Dann ist die Reihe*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \qquad \text{für } z \in D,$$

gleichmäßig und absolut konvergent auf D.

Beweis: Punktweise und absolute Konvergenz folgen aus dem Majorantenkriterium für Reihen. Die gleichmäßige Konvergenz folgt mit

$$\left|\sum_{n=0}^{m} f_n(z) - f(z)\right| \leq \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(z)\right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n < \varepsilon$$

und dem Cauchy-Konvergenzkriterium für unendliche Reihen. ■

Folgerung: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge stetiger Funktionen mit $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, so dass

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \qquad \text{für } z \in D,$$

gleichmässig konvergiert auf D. Dann ist f stetig auf D. $\square$

Vertauschbarkeit Differentiation und Summation.

Satz: *Sei $(f_n)_n$ eine Folge differenzierbarer Funktionen $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$, so dass*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{und} \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x), \qquad \text{für } x \in (a, b),$$

gleichmäßig konvergent auf (a, b) sind. Dann ist die Funktion f differenzierbar auf (a, b), und es gilt $f' = g$, d.h.

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \qquad \text{für alle } x \in (a, b).$$

$\square$

8.2 Potenzreihen

Definition: *Eine Reihe der Form*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \textit{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

heißt `(komplexe) Potenzreihe` *zum Entwicklungspunkt* $z_0 \in \mathbb{C}$. □

Beispiel: Die (komplexe) Exponentialfunktion ist definiert durch die Potenzreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Weiterhin: Elementare Funktionen sind über Potenzreihen definiert:

$$\log(z), \cos(z), \sin(z), \ldots$$

Taylor-Reihenentwicklung.

Betrachte für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$, die Taylor-Reihe

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad \text{mit } x_0, x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkungen.

- Die Taylor-Reihe einer C^∞-Funktion ist im Allgemeinen **nicht konvergent**.
- Konvergiert die Taylor-Reihe $T(x)$, so nicht notwendigerweise gegen $f(x)$.
- Falls

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

so nennt man die Funktion f reell-analytisch. □

Konvergenzradius einer Potenzreihe.

Satz: *Zu jeder Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \textit{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

gibt es eine Zahl $r \geq 0$ *mit den Eigenschaften*

$$|z - z_0| < r \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \textit{absolut konvergent}$$

$$|z - z_0| > r \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \textit{divergent}$$

Die Zahl $r \geq 0$ *heißt* `Konvergenzradius` *der Potenzreihe.*

Die Potenzreihe konvergiert für alle ρ *mit* $0 \leq \rho < r$ *auf*

$$\overline{K_\rho(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \rho\}$$

sogar gleichmäßig.

Beweis: Definiere

$$r := \sup \left\{ |w| : \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k \text{ konvergent} \right\}$$

- Dann gilt $0 \leq r \leq \infty$ und für $|z - z_0| > r$ ist die Potenzreihe divergent.
- Gilt $r = 0$, so ist die Potenzreihe nur für $z = z_0$ (absolut) konvergent.
- Sei nun $r > 0$ und $0 < \rho < r$. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > \rho$, so dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$$

konvergiert. Insbesondere ist die Folge $(a_k w^k)_{k \geq 0}$ beschränkt, d.h. es gibt eine Schranke $M > 0$ mit

$$\left| a_k w^k \right| \leq M \qquad \text{für alle } k \geq 0.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \le \rho < |w|$ gilt somit

$$\left|a_k(z - z_0)^k\right| = \left|a_k w^k\right| \left|\frac{z - z_0}{w}\right|^k \le M \left|\frac{z - z_0}{w}\right|^k$$

und weiterhin

$$\left|\frac{z - z_0}{w}\right|^k \le \left|\frac{z - z_0}{w}\right| < 1 \qquad \text{für alle } k \ge 1,$$

so dass die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{z - z_0}{w}\right|^k$$

konvergiert. Mit dem Majorantenkriterium von Weierstraß konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

absolut und gleichmäßig für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \le \rho$. ■

Die Formel von Cauchy-Hadamard.

Satz: *Den Konvergenzradius* $r \geq 0$ *einer Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \textit{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

kann man mit der Formel von Cauchy-Hadamard *berechnen:*

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Beweis: Verwende hierzu das Wurzelkriterium, zusammen mit der Äquivalenz

$$\begin{aligned}
\forall k \geq k_0 : \sqrt[k]{\left|a_k (z - z_0)^k\right|} \leq q < 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{\left|a_k (z - z_0)^k\right|} < 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}\, |z - z_0| < 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad |z - z_0| < \frac{1}{\limsup\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Konvergenz von Potenzreihen.

Satz: *Für eine Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ *gelten folgende Aussagen.*

(a) Falls einer der beiden Grenzwerte

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \quad \textit{oder} \quad r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

existiert (oder falls $r = \infty$*), so stimmt dieser Grenzwert mit dem Konvergenzradius der Potenzreihe überein.*

(b) Differenziert man die Potenzreihe, so erhält man wiederum eine Potenzreihe,

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1},$$

deren Konvergenzradius mit dem Konvergenzradius r *der Ausgangsreihe übereinstimmt, auch im Fall* $r = 0$ *oder* $r = \infty$*.*

Beweis: Der erste Teil von (a) folgt aus der Formel von Cauchy-Hadamard.

Verwende für den zweiten Teil von (a) das Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k}\right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |z-z_0|\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$$

und somit

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k}\right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |z-z_0| < \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

■

Zu Teil (b): Berechne den Konvergenzradius mit Cauchy-Hadamard, womit

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

wegen $\sqrt[k]{k} \to 1$ für $k \to \infty$. Somit sind die Konvergenzradien der beiden Potenzreihen identisch. ■

Beispiele.

- Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k!z^k$ konvergiert nur für $z=0$, denn $(k!z^k)_{k\geq 0}$ ist für $z \neq 0$ keine Nullfolge. Der Konvergenzradius ist in diesem Fall $r=0$.
- Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ hat den Konvergenzradius $r=1$.
- Die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ hat den Konvergenzradius $r=\infty$.
- Aus der Differentiation der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ergibt sich:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \ldots \qquad \text{für } |z| < 1$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} = \frac{1}{2}\left(2 + 6z + 12z^2 + \ldots\right) \qquad \text{für } |z| < 1$$

Potenzreihenentwicklung des Logarithmus.

- **Beachte:** Die integrierte Potenzreihe

$$C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$$

besitzt den gleichen Konvergenzradius wie die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k.$$

- **Anwendung:** Die Integration der Potenzreihe

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \qquad \text{für } |z| < 1.$$

liefert eine Potenzreihenentwicklung der Logarithmusfunktion

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad \text{für } -1 < x < 1.$$

Potenzreihenentwicklung von `arctan`.

- **Weitere Anwendung:** Integration der Potenzreihe

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} \qquad \text{für } -1 < x < 1$$

liefert Potenzreihenentwicklung

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} \qquad \text{für } -1 < x < 1.$$

Bemerkungen:

- Eine Potenzreihe ist innerhalb ihres Konvergenzkreises $K_r(z_0)$ stetig.
- Reelle Potenzreihen sind C^∞-Funktionen auf $(x_0 - r, x_0 + r)$.
- Eine reelle Potenzreihe stimmt mit einer `Taylor-Reihe` überein:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad \text{für } |x-x_0| < r$$

Identitätssatz und Abelscher Grenzwertsatz.

- Identitätssatz für Potenzreihen: Sind

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

reelle Potenzreihen, die in einem Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ die gleiche Funktion darstellen, so gilt

$$a_k = b_k \qquad \text{für alle } k \geq 0.$$

- Abelscher Grenzwertsatz: Reelle Potenzreihen der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

sind überall dort stetig, wo sie konvergieren, insbesondere in den Randpunkten ihres Konvergenzintervalls. □

Beispiel.

Die Reihe

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad \text{für } -1 < x < 1$$

konvergiert auch für $x = +1$. Somit ist nach dem Abelschen Grenzwertsatz insbesondere die Gleichung

$$\log(1+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} 1^{k+1}$$

gültig. Daraus folgt die Darstellung

$$\log(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

$\square$

Rechenregeln für Potenzreihen.

Satz: *Seien*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \textit{und} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1 > 0$ *und* $r_2 > 0$*. Dann gilt:*

(a)

$$f(z) + g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k, \qquad \textit{für } |z| < \min(r_1, r_2);$$

(b)

$$\lambda \cdot f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k z^k, \qquad \textit{für } |z| < r_1 \textit{ und mit } \lambda \in \mathbb{C};$$

(c) Cauchy-Produkt für Potenzreihen

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell} \right) z^k, \qquad \textit{für } |z| < \min(r_1, r_2). \qquad \square$$

Weitere Rechenregeln für Potenzreihen.

Satz: *Seien* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *und* $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ *Potenzreihen. Dann:*

(d) Ist $f(0) = 0$, *so läßt sich die Potenzreihe* $f(z)$ *in die Potenzreihe* $g(z)$ *einsetzen, d.h. es gibt ein* $r_3 > 0$ *und eindeutige Koeffizienten* $c_k \in \mathbb{C}$ *mit*

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad \text{für } |z| < r_3;$$

(e) Ist $f(0) \neq 0$, *so besitzt die Funktion* $1/f(z)$ *eine Potenzreihenentwicklung, d.h. es gibt ein* $r_4 > 0$ *und eindeutige Koeffizienten* $d_k \in \mathbb{C}$ *mit*

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \qquad \text{für } |z| < r_4;$$

die sich nach dem Cauchy-Produkt in (c) wie folgt rekursiv berechnen.

$$a_0 d_0 = 1, \qquad a_0 d_k = -\sum_{\ell=0}^{k-1} d_\ell a_{k-\ell}, \qquad \text{für } k = 1, 2, \ldots. \qquad \square$$

Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

Beispiel 1. Wir definieren den cosinus hyperbolicus für $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

und ersetzen e^x durch die Potenzreihe $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-x)^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Analog erhält für $x \in \mathbb{R}$ den sinus hyperbolicus mit

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

Beispiel 2. Für

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{1-x}, \qquad -1 < x < 1,$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x)}{1-x} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} x^{\ell}\right) \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots\right) \cdot (1 + x + x^2 + \ldots) \\
&= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{2!}\right) x^2 + \left(1 - \frac{1}{2!}\right) x^3 \\
&\quad + \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right) x^4 + \ldots \qquad \text{für } -1 < x < 1.
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

Beispiel 3. Wir setzen

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Dabei lautet die Potenzreihe des Nenners

$$e^x - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1}, \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Zur Potenzreihenentwicklung von $g(x)$ verwenden wir den Ansatz

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k, \qquad \text{für } x \in R,$$

und damit gilt

$$1 = \frac{e^x - 1}{x} \cdot g(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k \right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{\ell!} x^\ell \right)$$

Fortsetzung von Beispiel 3.

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k \right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{\ell!} x^\ell \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^{k} \frac{B_\ell}{\ell!(k-\ell+1)!} \right) x^k.$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\sum_{\ell=0}^{k} \frac{B_\ell}{\ell!(k-\ell+1)!} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0; \\ 0 & \text{für } k > 0. \end{cases}$$

Damit bekommt man

$$B_0 = 1, \qquad B_k = -\sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{k!}{\ell!(k-\ell+1)!} B_\ell \qquad \text{für } k = 1, 2, \ldots.$$

Die Zahlen B_k nennt man **Bernoullische Zahlen**:

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42}, \ldots, \qquad \square$$

8.3 Elementare Funktionen

Die Exponentialfunktion ist für $z \in \mathbb{C}$ definiert durch

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k,$$

hat Konvergenzradius $r = \infty$, und daher ist $\exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ stetig.

Für reelle Argumente ist $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x), \qquad \exp(0) = 1.$$

Anfangswertproblem für gewöhnliche Differentialgleichung.

Suche zu $a \in \mathbb{R}$ eine Funktion $y(x)$ mit

$$y'(x) = a \cdot y(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

Die (eindeutige) Lösung dieses Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$y(x) = y_0 \cdot \exp(a \cdot (x - x_0)). \qquad \square$$

Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Funktionalgleichung: Es gilt

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \qquad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}.$$

Folgerung: *Für die Exponentialfunktion gilt:*

(a) $\exp(z) \neq 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$;

(b) $\exp(-z) = 1/\exp(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$;

(c) $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$;

(d) Asymptotisches Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = \infty, \qquad \textit{und} \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$$

Beweis: (a),(b): Mit Funktionalgleichung gilt $\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(0) = 1$.

(c): $\exp(x)$ ist stetig, hat keine Nullstelle, und es gilt $\exp(0) = 1$.

(d): Für $x > 0$ gilt $\exp(x) > 1 + x \to \infty$, $x \to \infty$.

Mit $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$ folgt daraus $\lim_{x\to\infty} \exp(-x) = 0$. ■

Weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Satz: *Für die Exponentialfunktion gilt weiterhin:*

(e)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0 \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(f) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend mit* $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

(g) Für die Eulersche Zahl $e := \exp(1)$ *gilt:*

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = 2.7182\,81828\,45904\,52353\,60287\,\ldots$$

Die Eulersche Zahl e *ist eine* irrationale Zahl.

(h) Es gilt $\exp(q \cdot x) = (\exp(x))^q$ *für alle* $q \in \mathbb{Q}$ *und* $x \in \mathbb{R}$.

Beweise zu den weiteren Eigenschaften von exp.

Beweis: (e): Mit der Regel von l'Hospital gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{\exp(x)} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{\exp(x)} = 0.$$

(f): folgt zusammen mit Eigenschaften (c),(d) aus

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x) > 0$$

(g): Folgt mit

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

und der Regel von l'Hospital für

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{x\searrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

(h): Es gilt $\exp(nz) = (\exp(z))^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $\exp(x/m) = \sqrt[m]{\exp(x)}$ für $m \in \mathbb{N}$ sowie $\exp(\frac{n}{m}x) = (\exp(x))^{n/m}$ für $n, m \in \mathbb{N}$. $\square$

Der natürliche Logarithmus.

Da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, besitzt

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$$

eine eindeutige Umkehrfunktion,

$$\log : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Diese Umkehrfunktion nennt man den natürlichen Logarithmus.

Eigenschaften des natürlichen Logarithmus:

(a) $\log : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig.

(b) Es gilt: $\lim_{x \to 0+} \log(x) = -\infty$ und $\lim_{x \to \infty} \log(x) = \infty$.

(c) Es gilt die Funktionalgleichung

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y) \qquad \text{für alle } x, y > 0.$$

$\square$

Weitere Eigenschaften des Logarithmus.

(d) Potenz:

$$\log(x^q) = q \cdot \log(x) \qquad \text{für alle } x > 0,\ q \in \mathbb{Q}.$$

(e) Spezielle Funktionswerte:

$$\log(1) = 0 \qquad \text{und} \qquad \log(e) = 1$$

(f) Der natürliche Logarithmus ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx}\log(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{für alle } x > 0.$$

(g) Es gilt die Potenzreihenentwicklung

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad \text{für } -1 < x < 1.$$

□

Die allgemeine Potenzfunktion.

Für $a > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ hatten wir:

$$a^q = \exp(q \cdot \log(a))$$

Wir definieren daher allgemeine Potenzen wie folgt.

$$a^z := \exp(z \cdot \log(a)) \qquad \text{für } a > 0,\ z \in \mathbb{C}.$$

Eigenschaften der allgemeinen Potenzfunktion.

(a) Die Funktion $f(x) = a^x$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

(b) Es gilt

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

sowie

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

$\square$

Weitere Eigenschaften der allgemeinen Potenz.

(c) Für $a \neq 1$ besitzt $y = a^x$ eine Umkehrfunktion

$$y(x) = \log_a(x)$$

den Logarithmus zur Basis a, wobei gilt

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} \qquad \text{für } x > 0.$$

(d) Es gelten die Differentiationsregeln

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(a^x) &= \log(a) \cdot a^x && \text{für } x \in \mathbb{R},\ a > 0 \\
\frac{d}{dx}(x^a) &= a \cdot x^{a-1} && \text{für } a \in \mathbb{R},\ x > 0 \\
\frac{d}{dx}(\log_a x) &= \frac{1}{x \cdot \log(a)} && \text{für } x, a > 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes.

Satz: *Es gilt*

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \qquad \textit{für } a \in \mathbb{R},\ -1 < x < 1,$$

mit

$$\binom{a}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (a-j) \qquad \textit{für } k \geq 0.$$

Beweisidee: Rechte Seite löst Differentialgleichung $(1+x)g'(x) = a \cdot g(x)$. $\square$

Spezialfälle. Für $-1 < x < 1$ gelten die Entwicklungen

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 \pm \ldots \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 \mp \ldots
\end{aligned}$$

Die trigonometrischen Funktionen.

Wir setzen für $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \sin(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\ \cos(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \end{aligned}$$

Die Funktionen sin und cos besitzen jeweils Konvergenzradius $r = \infty$, sind somit auf ganz $\mathbb{C}$ erklärt und dort stetig.

Eigenschaften:

(a) sin ist eine `ungerade`, cos eine `gerade` Funktion, d.h. es gilt

$$\sin(-z) = -\sin(z) \quad \text{und} \quad \cos(-z) = \cos(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

(b) Weiterhin gilt: $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$. $\square$

Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen.

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= \cos(z) + i\sin(z) \quad \text{und} \quad e^{-iz} = \cos(z) - i\sin(z) \\
\sin(z) &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = (\sin(x)\cosh(y)) + i(\cos(x)\sinh(y)) \\
\cos(z) &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = (\cos(x)\cosh(y)) - i(\sin(x)\sinh(y)) \\
\sin^2(z) + \cos^2(z) &= 1.
\end{aligned}$$

(d) Es gelten die Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned}
\sin(u+v) &= \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v), \\
\cos(u+v) &= \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v).
\end{aligned}$$

(e) Für die *reellen* Ableitungen bekommt man

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x).$$

Tangens- und Kotangensfunktion.

Wir setzen für $z \in \mathbb{C}$,

$$\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \qquad \text{für } z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \qquad \text{für } z \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Eigenschaften:

(a) tan und cot sind π-periodische, ungerade Funktionen.

(b) Es gilt

$$\tan(z) = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \qquad \text{für } z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\cot(z) = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \qquad \text{für } z \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Reihen-Entwicklung von Tangens und Kotangens.

Es gelten die Reihen-Entwicklungen

$$\begin{aligned}\tan(z) &= z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \ldots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}|B_{2k}|z^{2k-1} \qquad \text{für } |z| < \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cot(z) &= \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \frac{1}{4725}z^7 - \ldots \\ &= \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!}|B_{2k}|z^{2k-1} \qquad \text{für } 0 < |z| < \pi\end{aligned}$$

mit den Bernoullischen Zahlen B_{2k}. □

Reelle Ableitungen: Im jeweiligen Definitionsbereich gilt

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dx}\cot(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

Hyperbolische Funktionen.

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \cosh(z) &:= \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) \\ \sinh(z) &:= \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) \end{aligned}$$

mit den entsprechenden Potenzreihenentwicklungen

$$\begin{aligned} \cosh(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \sinh(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

□

Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen.

(a) Die Funktion cosh ist gerade und sinh ist ungerade, d.h. es gilt

$$\cosh(-z) = \cosh(z) \quad \text{und} \quad \sinh(-z) = -\sinh(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

(b) Für die Ableitungen der hyperbolischen Funktionen gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\cosh(x) &= \sinh(x) \\ \frac{d}{dx}\sinh(x) &= \cosh(x) \end{aligned}$$

(c) Es gelten die Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \end{aligned}$$

(d) Es gilt die algebraische Relation

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1. \qquad \square$$

Inverse hyperbolische Funktionen, Areafunktionen.

Die Funktion sinh ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$,
die Funktion cosh ist streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$.

Die jeweiligen Umkehrfunktionen bezeichnen wir mit `arcosh` und `arsinh`.

Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}(x) &= \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) && \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{arcosh}(x) &= \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) && \text{für } 1 \le x < \infty \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\operatorname{arsinh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} && \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \frac{d}{dx}\operatorname{arcosh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} && \text{für } 1 \le x < \infty \end{aligned}$$

□

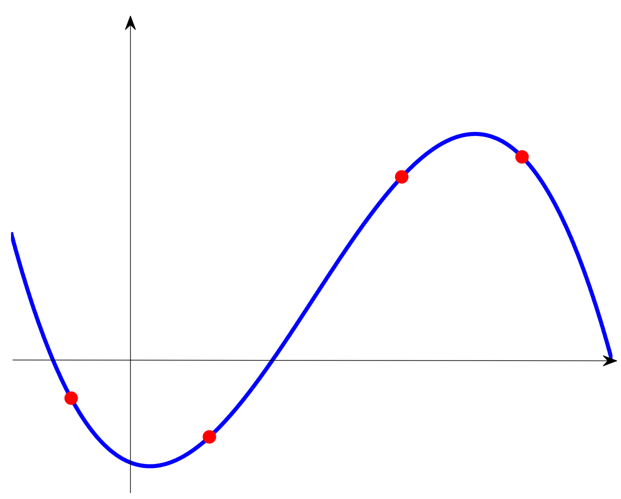
9 Interpolation

9.1 Problemstellung

Gegeben: Diskrete Werte einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an $n+1$ Stützstellen

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n.$$

Eingabedaten: $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \cdots, (x_n, f_n)$.

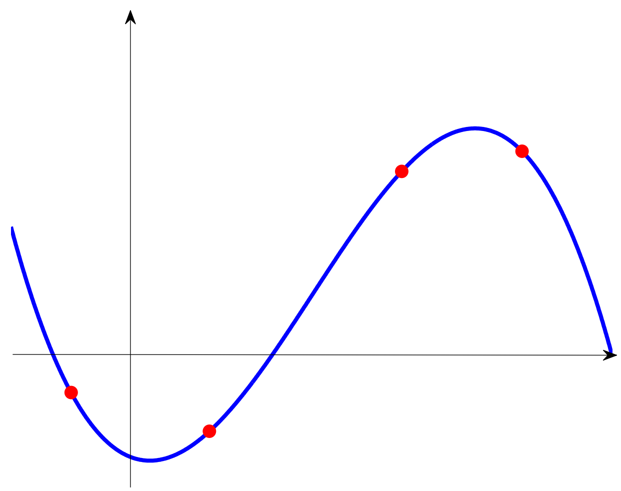


Gegebene Daten (x_j, f_j).

Gesucht: *Einfache* Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Daten interpoliert, d.h.

$$p(x_i) = f_i \qquad \text{für alle } i = 0, 1, \ldots, n,$$

z.B.: p Polynom, trigonometrisches Polynom, rationale Funktion.



Gegebene Daten (x_j, f_j).

Fragen:

- Gibt es so ein p? Falls ja, ist p eindeutig?
- Wie sieht die Lösung p aus und wie berechnet man p?

Klassische Polynom-Interpolation.

Bestimme ein Polynom (höchstens) n-ten Grades

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

das die gegebenen Daten interpoliert, so dass $p_n(x_i) = f_i$, $0 \leq i \leq n$.

Erster Lösungsansatz: Die Interpolationsbedingungen ergeben lineares System

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n &= f_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n &= f_1 \\
\vdots \quad &\quad \vdots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n &= f_n
\end{aligned}$$

Setze:

$X = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $f\big|_X = (f_0, \ldots, f_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $a = (a_0, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Vandermonde-Matrix.

Die Koeffizientenmatrix des linearen Systems

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},$$

kurz

$$V \cdot a = f\big|_X,$$

heißt Vandermonde-Matrix.

Satz: *Für die Determinante der Vandermonde-Matrix* $V \equiv V(x_0, \dots, x_n)$ *gilt*

$$\det(V) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Beweis: Durch vollständige Induktion über n.

Induktionsanfang: $n = 1$: $\det(V(x_0, x_1)) = x_1 - x_0$.

Induktionsschritt: $n - 1 \to n$.

$$\det\left(V(x_0, \dots, x_n)\right)$$

$$= \quad \det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & & & \vdots & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{bmatrix}$$

$$= \quad \det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_0 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0 x_1 & \cdots & x_1^n - x_0 x_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n^2 - x_0 x_n & \cdots & x_n^n - x_0 x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \quad (x_1 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \cdot \det\left(V(x_1, \dots, x_n)\right) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i). \qquad \blacksquare$$

Existenz und Eindeutigkeit der Interpolation.

Folgerung: Falls Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschieden, so ist V regulär.

Satz: *Zu paarweise verschiedenen Stützstellen*

$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$$

und Funktionswerten

$$f_0, f_1 \ldots, f_n \in \mathbb{R}$$

gibt es genau ein interpolierendes Polynom p_n vom Höchstgrad n mit

$$p_n(x_i) = f_i \qquad \text{für alle } 0 \leq i \leq n.$$

■

ABER: Wir berechnen die Lösung **nicht** über das lineare System $V \cdot a = f\big|_X$.

DENN: Dies ist zu **teuer** und **instabil**. □

9.2 Interpolationsformeln nach Lagrange und Newton

Lagrange-Darstellung.

Definieren Lagrange-Polynome

$$L_j(x) := \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{j-1})\cdot(x-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_j-x_{j-1})\cdot(x_j-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x_j-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i} \quad \text{für } 0 \le j \le n.$$

Dann ist L_j ein Polynom vom Grad n, und es gilt

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \qquad \text{für } 0 \le i,j \le n.$$

Lösung mit der Lagrange-Darstellung.

Die Interpolationsaufgabe

$$p_n(x_i) = f_i \qquad \text{für alle } 0 \leq i \leq n$$

wird gelöst durch das (eindeutige) Polynom

$$p_n(x) = f_0 L_0(x) + \ldots + f_n L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x).$$

Die obige Darstellung von p_n heißt `Lagrange-Darstellung`. □

Beispiel. Betrachte die Daten

x_j	0	1	2	3
f_j	0	0	4	18

Dann sieht die zugehörige Lagrange-Basis wie folgt aus.

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \qquad L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \qquad L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$

Das interpolierende kubische Polynom p_3 besitzt die Darstellungen

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 4 \cdot L_2(x) + 18 \cdot L_3(x) \\ &= -4 \cdot \frac{x(x-1)(x-3)}{2} + 18 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \\ &= x^3 - x^2. \end{aligned}$$

Auswertung von Interpolationspolynomen.

Für $0 \leq j \leq k \leq n$ bezeichne p_{kj} das eindeutige Interpolationspolynom vom Höchstgrad j zu den Daten

$$(x_{k-j}, f_{k-j}), \ldots, (x_k, f_k),$$

d.h. es gilt

$$p_{kj}(x_\ell) = f_\ell, \qquad \text{für alle } k-j \leq \ell \leq k.$$

Dann lassen sich für ein festes $x \in \mathbb{R}$ die Werte $p_{kj}(x)$ rekursiv berechnen.

Lemma (Aitken)**:** *Es gilt die Rekursion*

$$\begin{aligned} p_{k0}(x) &= f_k \\ p_{kj}(x) &= p_{k,j-1}(x) + \frac{x - x_k}{x_{k-j} - x_k}\left(p_{k-1,j-1}(x) - p_{k,j-1}(x)\right) \qquad \textit{für } j \geq 0. \end{aligned}$$

Beweis: Vollständige Induktion über j.

Induktionsanfang: Für $j = 0$ ist p_{k0} konstant mit $p_{k0} \equiv f_k$.

Induktionsschritt: $j - 1 \to j$: Die rechte Seite der Rekursion,

$$q(x) = p_{k,j-1}(x) + \frac{x - x_k}{x_{k-j} - x_k}(p_{k-1,j-1}(x) - p_{k,j-1}(x))$$

ist ein Polynom vom Höchstgrad j.

Weiterhin interpoliert $p_{k,j-1}$ nach Induktionsvoraussetzung die Daten

$$(x_{k-j+1}, f_{k-j+1}), \ldots, (x_k, f_k),$$

und $p_{k-1,j-1}$ interpoliert die Daten

$$(x_{k-j}, f_{k-j}), \ldots, (x_{k-1}, f_{k-1}).$$

Daraus folgt mit der Rekursion, dass das Polynom q die Daten

$$(x_{k-j}, f_{k-j}), \ldots, (x_k, f_k)$$

interpoliert, genauso wie p_{kj}. Wegen der Eindeutigkeit gilt $q \equiv p_{kj}$. ■

Algorithmus von Neville-Aitken.

Ziel: Rekursive Berechnung von $p_{nn}(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ in Dreiecksschema:

$$
\begin{array}{ccccc}
p_{00}(x) & & & & \\
p_{10}(x) & p_{11}(x) & & & \\
p_{20}(x) & p_{21}(x) & p_{22}(x) & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
p_{n0}(x) & p_{n1}(x) & p_{n2}(x) & \cdots & p_{nn}(x)
\end{array}
$$

Besser: Effiziente Auswertung in Datenvektor $f = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$:

$$
\begin{array}{ccccc}
f_0 = f_0(x) & & & & \\
f_1 = f_1(x) & f_0(x) & & & \\
f_2 = f_2(x) & f_1(x) & f_0(x) & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
f_n = f_n(x) & f_{n-1}(x) & f_{n-2}(x) & \cdots & f_0(x)
\end{array}
$$

Implementierung als Matlab-Funktion.

INPUT:

```
x = (x(1),x(2),...,x(n))   % Stuetzstellen
f = (f(1),f(2),...,f(n))   % Funktionswerte
y                          % Auswertungsstelle

function p = neville(x,f,y)
n = length(x);
for k=2:n
  z = y-x(k);
  for i=k-1:-1:1
    f(i) = f(i+1) + z/(x(i)-x(k))*(f(i)-f(i+1));
  end;
end;
p = f(1);
```

Newton-Darstellung. Betrachte die Newton-Basis

$$\omega_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j), \qquad \text{für } 0 \le i \le n.$$

Dann gibt es *eindeutige* Newton-Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} c_i \omega_i(x) \\ &= c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Die obige Darstellung von p_n heißt Newton-Darstellung.

Beachte: Es gilt:

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= c_0 \\ p_n(x_1) &= c_0 + c_1(x_1 - x_0) \\ p_n(x_2) &= c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Berechnung der Newton-Koeffizienten.

Beachte: Aus den Interpolationsbedingungen folgt

$$
\begin{aligned}
p_n(x_0) &= c_0 \overset{!}{=} f_0 \quad \Longrightarrow \quad c_0 = f_0 \\
p_n(x_1) &= c_0 + c_1(x_1 - x_0) \overset{!}{=} f_1 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \\
\vdots &= \vdots \\
p_n(x_n) &= \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x_n - x_j) \\
&= c_0 + c_1(x_n - x_0) + \ldots + c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1}) \\
&\overset{!}{=} f_n
\end{aligned}
$$

mit

$$
c_n = \left(f_n - \sum_{j=0}^{n-1} c_j \prod_{i=0}^{j-1} (x_n - x_i) \right) \Bigg/ \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j).
$$

Beobachtungen.

- Zur Berechnung von c_j benötigt man nur die ersten $(j+1)$ Daten

$$(x_0, f_0), (x_1, f_1), \ldots, (x_j, f_j).$$

Notation:

$$c_j = f[x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j] \qquad \text{für } j = 0, 1, \ldots, n$$

- Nimmt man ein Datum (x_{n+1}, f_{n+1}) hinzu, so gilt:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + c_{n+1} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

mit

$$c_{n+1} = (f_{n+1} - p_n(x_{n+1})) \Big/ \prod_{j=0}^{n} (x_{n+1} - x_j).$$

$\square$

Dividierte Differenzen.

Satz: *Die Koeffizienten*

$$c_j = f[x_0, x_1, \ldots, x_j], \qquad 0 \le j \le n,$$

des interpolierenden Newton-Polynoms

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_j \omega_j(x)$$

sind gegeben durch die dividierten Differenzen

$$\begin{aligned} f[x_j] &= f_j \\ f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}. \end{aligned}$$

Beweis: Mit Aitken-Lemma. □

Effiziente Berechnung der dividierten Differenzen.

Beispiel: Rekursives Berechnungsschema der dividierten Differenzen für $n = 3$.

x	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
x_0	f_0			
x_1	f_1	$f[x_0, x_1]$		
x_2	f_2	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	f_3	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

Zum Beispiel:

$$
\begin{aligned}
f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \\
f[x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{1}{x_3 - x_1} \left(\frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \right)
\end{aligned}
$$

Der Interpolationsfehler. Für das Interpolationspolynom gilt

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= f(x) - p_n(x)\\ &= f(x) - \left(p_{n+1}(x) - c_{n+1}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right)\\ &= f[x_0, \ldots, x_n, x]\prod_{i=0}^{n}(x - x_i).\end{aligned}$$

Satz: *Sei* $f \in C^{n+1}([a, b])$. *Dann gibt es ein* $\xi \in [a, b]$ *mit*

$$f[x_0, \ldots, x_{n+1}] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Folgerung: *Für den* `Interpolationsfehler` *gilt die Abschätzung*

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot \left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|.$$

Tschebyscheff-Knoten.

Beachte: Ein Term des Interpolationsfehlers ist das Knotenpolynom

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Optimierungsproblem: Bestimme die Knoten $x_0, x_1, \dots, x_n$, so dass

$$\max_{x_0,\dots,x_n \in [a,b]} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

minimal auf $[a, b]$.

Lösung: Für das Intervall $[-1, 1]$ sind die Tschebyscheff-Knoten optimal.

$$x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right) \qquad j = 0, 1, \dots, n.$$

Polynominterpolation mit Matlab.

Die Matlab-Funktion polyfit

```
a = polyfit(x,f,n-1);
```

berechnet die Koeffizienten

```
a = (a(1),a(2),...,a(n));
```

des Interpolationspolynoms

```
p(x) = a(1)*x^(n-1) + a(2)*x^(n-2) + ... + a(n-1)*x + a(n);
```

zu den Daten

```
x = (x(1),x(2),...,x(n));
f = (f(1),f(2),...,f(n));
```

Polynome kann man mit der Matlab-Funktion polyval auswerten.

9.3 Spline-Interpolation

Sei Δ_n eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$:

$$\Delta_n \quad : \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

mit Teilintervallen $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Definition: *Eine Funktion* $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ *heißt* `kubischer Spline`, *falls*

- $S \in C^2([a, b])$, *d.h.* S *ist zweimal stetig differenzierbar auf* $[a, b]$;
- S *ist auf jedem Teilintervall* $[x_{j-1}, x_j]$, $1 \leq j \leq n$, *ein kubisches Polynom:*

$$S(x)\Big|_{[x_{j-1}, x_j]} \equiv s_j(x) = a_j + b_j(x - x_{j-1}) + c_j(x - x_{j-1})^2 + d_j(x - x_{j-1})^3.$$

$\square$

Ziel: Interpolation der Daten (x_j, f_j), $0 \leq j \leq n$, mit einem kubischen Spline S, so dass

$$S(x_j) = f(x_j), \qquad \text{für } 0 \leq j \leq n.$$

Interpolation mit kubischen Splines.

Beobachtungen:

- Ein kubischer Spline besitzt $4n$ Parameter, die wie folgt bestimmt werden.
  - Interpolationseigenschaft:

$$s_j(x_{j-1}) = f_{j-1} \quad \text{und} \quad s_j(x_j) = f_j \qquad \text{für alle } 1 \le j \le n;$$

  - Stetigkeit der Ableitung:

$$s_j'(x_j) = s_{j+1}'(x_j) \qquad \text{für alle } 1 \le j \le n-1;$$

  - Stetigkeit der zweiten Ableitung:

$$s_j''(x_j) = s_{j+1}''(x_j) \qquad \text{für alle } 1 \le j \le n-1;$$

- Dies sind insgesamt $4n-2$ Gleichungen für $4n$ Parameter.
- **OBS!** Es fehlen noch zwei Bedingungen.

Zwei weitere Nebenbedingungen.

Definition: *Ein kubischer Spline heißt*

- natürlicher Spline, *falls* $S''(a) = S''(b) = 0$;
- periodischer Spline, *falls* $S^{(i)}(a) = S^{(i)}(b)$, $i = 0, 1, 2$;
- vollständiger Spline, *falls* $S'(a) = f'(a)$ *und* $S'(b) = f'(b)$.

Beachte: Jede drei obigen Bedingungen liefert zwei weitere Gleichungen.

Satz: *Unter allen interpolierenden* C^2*-Funktionen minimiert der* natürliche kubische Spline *das Funktional*

$$I[y] := \int_a^b (y''(x))^2 \, dx$$

$\square$

Bemerkung: Das Funktional I mißt die Krümmung von y *approximativ*. $\square$

Berechnung des natürlichen kubischen Splines.

Sei S auf dem Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$ gegeben durch

$$S(x)\big|_{[x_{j-1},x_j]} \equiv s_j(x) = a_j + b_j(x - x_{j-1}) + c_j(x - x_{j-1})^2 + d_j(x - x_{j-1})^3,$$

so gilt

$$\begin{aligned} a_j &= f_{j-1} \\ b_j &= \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{2M_{j-1} + M_j}{6} h_j \\ c_j &= \frac{M_{j-1}}{2} \\ d_j &= \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j} \end{aligned}$$

wobei $h_j = x_j - x_{j-1}$ für $1 \leq j \leq n$.

Die Momente $M_j = S''(x_j)$ lösen ein lineares System mit *Tridiagonalmatrix*.

Herleitung des Splines mit Momentenmethode.

Der gewählte Ansatz

$$M_j := S''(x_j), \qquad \text{für } 0 \leq j \leq n,$$

heißt Momentenmethode: $s_j''(x)$ ist eine Gerade mit

$$s_j''(x) = M_{j-1} + \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j}(x - x_{j-1}) \qquad \text{mit } h_j = x_j - x_{j-1}$$

Zweifache Integration über Intervall $[x_{j-1}, x]$ liefert

$$\begin{aligned} s_j'(x) &= B_j + M_{j-1}(x - x_{j-1}) + \frac{M_j - M_{j-1}}{2h_j}(x - x_{j-1})^2 \\ s_j(x) &= A_j + B_j(x - x_{j-1}) + \frac{M_{j-1}}{2}(x - x_{j-1})^2 + \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}(x - x_{j-1})^3 \end{aligned}$$

mit Integrationskonstanten A_j, B_j.

Lösung der Bedingungsgleichungen.

Aus den Interpolationsbedingungen $s_j(x_{j-1}) = f_{j-1}$ und $s_j(x_j) = f_j$ folgt direkt

$$A_j = f_{j-1} \quad \text{und} \quad B_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(M_j + 2M_{j-1}), \tag{1}$$

mit der Stetigkeit von S' bei x_j, $1 \leq j < n$, d.h. $s_j'(x_j) = s_{j+1}'(x_j)$ weiterhin

$$B_j + \frac{M_j + M_{j-1}}{2} h_j = B_{j+1} \qquad \text{für } 1 \leq j \leq n-1. \tag{2}$$

Einsetzen von (1) in (2) ergibt schließlich $n-1$ lineare Gleichungen

$$h_j M_{j-1} + 2(h_j + h_{j+1})M_j + h_{j+1}M_{j+1} = 6\left(\frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j}\right),$$

$1 \leq j \leq n-1$, für die $n-1$ *unbekannten* Momente $M_1, \ldots, M_{n-1}$.

Beachte: Die Momente $M_0 = 0$ und $M_n = 0$ sind bereits *bekannt*.

Tridiagonalsystem für die Momente.

Das hergeleitete $(n-1)\times(n-1)$ lineare System hat die Form

$$\begin{bmatrix} 2k_1 & h_2 & & & \\ h_2 & 2k_2 & h_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-2} & 2k_{n-2} & h_{n-1} \\ & & & h_{n-1} & 2k_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{bmatrix}$$

mit $h_j = x_j - x_{j-1}$, $1 \leq j \leq n$, $k_j = h_j + h_{j+1}$, $1 \leq j \leq n-1$, und

$$d_j = 6\left(\frac{f_{j+1}-f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j}\right) \qquad \text{für } 1 \leq j \leq n-1,$$

sowie den Randwerten $M_0 = M_n = 0$.

Abschließende Bemerkungen zu Splines.

- Der natürliche kubische Spline kann *effizient* berechnet werden, nämlich durch Lösen des Tridiagonalsystems in nur $\mathcal{O}(n)$ Schritten.
- Eine Splineinterpolante vermeidet (unerwünschte) Oszillationen.
- Für $f \in C^4$ gilt die asymptotische Fehlerabschätzung

$$|f(x) - S(x)| = \mathcal{O}(h^4), \qquad h \to 0$$

  wobei $h = \max_{1 \leq j \leq n} h_j$.

- Verwendet man einen *vollständigen* Spline mit Randbedingungen

$$S'(a) = f'(a) \quad \text{und} \quad S'(b) = f'(b)$$

  so erhält man ein Tridiagonalsystem, das effizient gelöst werden kann.

- Verwendet man *periodische* Splines, so erhält man kein Tridiagonalsystem. Die Lösung kann dennoch effizient in $\mathcal{O}(n)$ Schritten berechnet werden.

Spline-Interpolation mit Matlab.

Die Matlab-Funktion spline

```
s = spline(x,f);
```

berechnet die Darstellung s einer kubischen Splinefunktion zu den Daten

```
x = (x(1),x(2),...,x(n));
f = (f(1),f(2),...,f(n));
```

Splines kann man mit der Matlab-Funktion ppval wie folgt auswerten.

```
t = linspace(-1,1,1000);   % 1000 uniforme Knoten in [-1,1]
y = ppval(s,t);            % Auswertung des Splines s
```

10 Integration

10.1 Das bestimmte Integral

Sei $f : [a, b] \to R$ eine *beschränkte* Funktion auf einem Kompaktum $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definition: *Eine Menge der Form*

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

nennt man eine **Zerlegung** *(Partition, Unterteilung) des Intervalls* $[a, b]$*.*

Die **Feinheit** *der Zerlegung Z ist dabei definiert durch*

$$\|Z\| = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$$

Man bezeichnet mit $\mathbf{Z}$ *bzw.* $\mathbf{Z}[a, b]$ *die Menge aller Zerlegungen von* $[a, b]$*.* □

Riemannsche Summen.

Definition: *Jede Summe der Form*

$$R_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad \textit{für } x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$$

nennt man eine Riemannsche Summe *der Zerlegung Z,*

$$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf f([x_i, x_{i+1}])\ (x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die Untersumme *von* $f(x)$ *zur Zerlegung Z,*

$$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup f([x_i, x_{i+1}])\ (x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die Obersumme *von* $f(x)$ *zur Zerlegung Z.* □

Eigenschaften von Riemannschen Summen.

Beobachtung: Aus den Definitionen folgt direkt:

- Für eine *feste* Zerlegung Z gilt stets

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

- Ist Z_1 eine *feinere* Zerlegung als Z_2, d.h. $Z_2 \subset Z_1$, dann gilt

$$U_f(Z_2) \leq U_f(Z_1) \quad \text{und} \quad O_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

- Für zwei *beliebige* Zerlegungen Z_1 und Z_2 gilt daher stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

und

$$U_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

$\square$

Das Riemannsche Integral.

Beobachtung: Es existieren die Grenzwerte (über immer feinere Zerlegungen):

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad := \quad \sup\{U_f(Z) \;:\; Z \in \mathbf{Z}[a,b]\} \qquad (\texttt{Unterintegral})$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad := \quad \inf\{O_f(Z) \;:\; Z \in \mathbf{Z}[a,b]\} \qquad (\texttt{Oberintegral})$$

Definition: *Eine Funktion* $f(x)$ *heißt* `(Riemann-)integrierbar` *über* $[a,b]$, *falls Unter- und Oberintegral übereinstimmen, d.h.*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

das `(Riemann-)Integral` *von* $f(x)$ *über* $[a,b]$. □

Beispiele. Die konstante Funktion $f(x) \equiv c$ ist integrierbar, denn

$$U_f(Z) = O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} c\,(x_{i+1} - x_i) = c\,(b - a)$$

und somit

$$\int_a^b f(x)\,dx = c\,(b - a).$$

- Für $f(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$, und $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}$ gilt

$$\begin{aligned} U_f(Z_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \\ O_f(Z_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

somit

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Weitere Beispiele.

- Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & : \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann gilt für **jede** Zerlegung: $U_f(Z) = 0$, aber $O_f(Z) = 1$.

Somit ist die Funktion f **nicht** integrierbar.

- Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \neq c \\ 1 & : \quad x = c \end{cases}$$

für $a \leq c \leq b$. Dann ist die Funktion f integrierbar mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

denn es gilt

$$U_f(Z) = 0 \qquad \text{und} \qquad 0 < O_f(Z) \leq 2\|Z\|.$$

Satz: *Seien* $f(x)$ *und* $g(x)$ *integrierbar auf* $[a, b]$*. Dann gilt:*

(a) *Für* $a \leq c \leq b$ *ist* f *auf* $[a, b]$ *integrierbar, genau dann wenn* f *auf* $[a, c]$ *und auf* $[c, b]$ *integrierbar ist, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

(b) Linearität*: Mit* f *und* g *ist auch* $\alpha f(x) + \beta g(x)$ *für* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, integrierbar:*

$$\int_a^b \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

(c) Positivität*: Falls* $f(x) \geq 0$ *für alle* $x \in [a, b]$*, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

(d) Monotonie*: Falls* $f(x) \leq g(x)$ *für alle* $x \in [a, b]$*, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Standardabschätzungen.

Satz: *Sei* f *integrierbar über* $[a, b]$. *Dann gelten die Abschätzungen*

$$(b-a)\cdot\inf(f[a,b]) \leq \int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; (b-a)\cdot\sup(f[a,b]).$$

und weiterhin

$$\left|\;\int_a^b f(x)\,dx\;\right| \leq (b-a)\cdot\sup\{|f(x)|\,:\,a\leq x\leq b\}$$

Falls $|f(x)|$ *integrierbar ist, so gilt*

$$\left|\;\int_a^b f(x)\,dx\;\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Beweis: Für die Zerlegung $Z = \{a, b\}$ von $[a, b]$ folgt sofort

$$\inf(f[a, b]) \cdot (b - a) = U_f(Z) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq O_f(Z) = \sup(f[a, b]) \cdot (b - a)$$

Weiterhin folgt wegen $\pm f(x) \leq |f(x)|$, für alle $x \in [a, b]$, die Ungleichung

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^{\underline{b}} |f(x)|\, dx \leq O_{|f|}(Z) = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} \cdot (b - a).$$

■

Bemerkung: Die obige Abschätzung

$$\inf(f[a, b]) \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx$$

liefert insbesondere die Positivität des Integrals. □

Weitere Bemerkungen.

- Die Aussage
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$
gilt für beliebige Anordnungen von a, b, c.
Wir definieren daher
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$
sowie
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

- Ist $f(x)$ integrierbar, so gilt
$$R_f(Z_m) \to \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{für } m \to \infty$$
für alle Zerlegungsfolgen $\{Z_m\}_m \subset \mathbf{Z}[a,b]$ mit $\|Z_m\| \to 0$ für $m \to \infty$. $\square$

10.2 Kriterien für Integrierbarkeit

Satz: (Riemannsches Kriterium)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine beschränkte Funktion. Dann sind äquivalent:*

(a) $f(x)$ *ist integrierbar über* $[a, b]$.

(b) Für alle $\varepsilon > 0$ *gibt es eine Zerlegung* $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ *mit* $O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon$.

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ mit

$$0 \leq O_f(Z) - \overline{\int_a^b} f(x)\, dx < \varepsilon/2,$$

$$0 \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx - U_f(Z) < \varepsilon/2.$$

$(a) \Rightarrow (b)$: Folgt aus der Addition der beiden Ungleichungen.
$(b) \Rightarrow (a)$: Die Integrierbarkeit von f folgt direkt aus (b) mit

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Monotone Funktionen sind integrierbar.

Satz: *Eine beschränkte monotone Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist integrierbar.*

Beweis: Für eine uniforme Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ mit

$$x_j = a + \frac{j}{n}(b-a), \qquad 0 \le j \le n,$$

und für f monoton wachsend gilt

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{j=0}^{n-1} (f(x_{j+1}) - f(x_j))(x_{j+1} - x_j) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon \end{aligned}$$

für hinreichend großes n. Nach dem Riemannschen Kriterium ist f integrierbar.

Analog zeigt man die Integrierbarkeit für f monoton fallend. ■

Stetige Funktionen sind integrierbar.

Satz: *Eine beschränkte stetige Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist integrierbar.*

Beweis: f ist sogar gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum $[a, b]$. Daher gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Für eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ mit Feinheit $\|Z\| < \delta$ gilt dann

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{j=0}^{n-1} (\sup f[x_j, x_{j+1}] - \inf f[x_j, x_{j+1}]) \cdot (x_{j+1} - x_j) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot (x_{j+1} - x_j) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist f nach dem Riemannschen Kriterium integrierbar. ■

Satz: *Seien* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbare beschränkte Funktionen. Dann gilt:*

(a) Das Produkt $f(x) \cdot g(x)$ *ist integrierbar über* $[a, b]$.

(b) Gilt $g(x) \geq C > 0$, *so ist der Quotient* $f(x)/g(x)$ *integrierbar über* $[a, b]$.

Beweis: (a): Für eine feste Zerlegung $Z = \{x_j\}_{j=0}^n \in \mathbf{Z}[a, b]$ gilt

$$\begin{aligned} s_j &:= \sup(f \cdot g)[x_j, x_{j+1}] - \inf(f \cdot g)[x_j, x_{j+1}] \\ &= \sup_{x,y}(f(x)g(x) - f(y)g(y)) \\ &= \sup_{x,y}(f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)) \\ &\leq \|f\|_\infty \sup_{x,y}(g(x) - g(y)) + \|g\|_\infty \sup_{x,y}(f(x) - f(y)) \end{aligned}$$

und somit

$$O_{f \cdot g} - U_{f \cdot g} \leq \|f\|_\infty (O_g - U_g) + \|g\|_\infty (O_f - U_f),$$

womit die Integrierbarkeit von $f \cdot g$ mit dem Riemannschen Kriterium folgt. ■

Beweis von (b): Für eine feste Zerlegung $Z = \{x_j\}_{j=0}^n \in \mathbf{Z}[a, b]$ gilt

$$
\begin{aligned}
s_j &:= \sup\left(\frac{1}{g}\right)[x_j, x_{j+1}] - \inf\left(\frac{1}{g}\right)[x_j, x_{j+1}] \\
&= \sup_{x,y}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right) \\
&= \sup_{x,y}\frac{g(y) - g(x)}{g(x) \cdot g(y)} \\
&\leq \frac{1}{C^2} \cdot \sup_{x,y}(g(y) - g(x))
\end{aligned}
$$

und somit

$$
O_{1/g} - U_{1/g} \leq \frac{1}{C^2} \cdot (O_g - U_g),
$$

womit die Integrierbarkeit von $1/g$ mit dem Riemannschen Kriterium folgt.

Insgesamt folgt mit (a) die Integrierbarkeit von f/g. ■

Spezialfälle integrierbarer Funktionen.

Satz: *Sei* f *integrierbar über* $[a, b]$. *Dann sind folgende Funktionen integrierbar.*

$$
\begin{aligned}
|f|(x) &:= |f(x)| \\
f^+(x) &:= \begin{cases} f(x) & \textit{für } f(x) \geq 0, \\ 0 & \textit{für } f(x) < 0. \end{cases} \\
f^-(x) &:= \begin{cases} 0 & \textit{für } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \textit{für } f(x) < 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Beweis: Aus

$$\sup_{x,y}(|f(x)| - |f(y)|) \leq \sup_{x,y}(f(x) - f(y))$$

folgt die Integrierbarkeit der Funktion $|f|$. Die Integrierbarkeit von f^+ und f^- folgt aus den Relationen $f^+ = (|f| + f)/2$ und $f^- = (|f| - f)/2$. ■

10.3 Der Hauptsatz und Anwendungen

Definition: *Seien Funktionen* $F, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Funktionen mit* $F'(x) = f(x)$, $a \leq x \leq b$. *Dann heißt* $F(x)$ Stammfunktion *von* $f(x)$.

Bemerkung:

- Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so sind alle Funktionen der Form

$$\tilde{F}(x) = F(x) + c$$

  mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f(x)$.

- Sind $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$, so ist die Funktion

$$F_1(x) - F_2(x)$$

  konstant.

□

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Satz: *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann gilt:*

(a) Die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

ist eine Stammfunktion von $f(x)$*.*

(b) Ist $F(x)$ *eine Stammfunktion von* $f(x)$*, so gilt*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Beweis von (a): Wir zeigen, dass $F'(x) = f(x)$ gilt.

Sei $h \neq 0$ so, dass $x, x+h \in [a,b]$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| \\
&\quad = \left| \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right) - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt \right| \\
&\quad = \left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt \right| \\
&\quad \leq \sup\{\, |f(t) - f(x)| \,:\, |t-x| \leq h \text{ und } t \in [a,b]\} \\
&\quad \longrightarrow 0 \qquad \text{für } h \to 0,
\end{aligned}
$$

mit der (gleichmäßigen) Stetigkeit von f auf $[a,b]$. ∎

Beweis von (b): Mit Teil (a) gilt

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

für eine Konstante C. Daraus folgt

$$\begin{aligned} F(b) &= \int_a^b f(t)\,dt + C \\ F(a) &= \int_a^a f(t)\,dt + C = 0 + C = C \end{aligned}$$

und somit

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

$\blacksquare$

Bemerkungen.

- Teil (a) des Hauptsatzes gilt auch für *stückweise stetige* Funktionen $f(x)$. An den Unstetigkeitsstellen ist die Stammfunktion allerdings nur **einseitig differenzierbar** mit

$$F'(x^-) = \lim_{x \to x^-} f(x) \quad \text{und} \quad F'(x^+) = \lim_{x \to x^+} f(x).$$

- Eine Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ nennt man `das unbestimmte Integral` von $f(x)$ und man schreibt

$$F = \int f(x)\, dx$$

Die Funktion F ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

$\square$

Beispiele. Wir bezeichnen mit C stets die Integrationskonstante.

$$
\begin{aligned}
\int x^n \, dx &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad \text{für } n \neq -1 \\
\int \frac{1}{x} \, dx &= \log|x| + C \qquad \text{für } x \neq 0 \\
\int \sin(x) \, dx &= -\cos(x) + C \\
\int \cos(x) \, dx &= \sin(x) + C \\
\int \tan(x) \, dx &= -\log|\cos(x)| + C \qquad \text{für } \cos(x) \neq 0 \\
\int \cot(x) \, dx &= \log|\sin(x)| + C \qquad \text{für } \sin(x) \neq 0 \\
\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx &= \tan(x) + C \qquad \text{für } x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Weitere Beispiele.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx &= -\cot(x) + C & &\text{für } x \neq k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}\\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin(x) + C & &\text{für } |x| < 1\\
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C & &\\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C & &\text{für } |x| > 1\\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x + C & &\\
\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C & &\text{für } |x| \neq 1.\\
\int e^{ax}\,dx &= \frac{1}{a}e^{ax} + C & &\text{für } a \neq 0.
\end{aligned}
$$

Noch mehr Beispiele.

$$
\begin{aligned}
\int b^x \, dx &= \frac{1}{\log(b)} b^x + C && \text{für } b > 0, b \neq 1. \\
\int \log(x) \, dx &= x(\log(x) - 1) + C && \text{für } x > 0. \\
\int \log_b(x) \, dx &= \frac{x}{\log(b)} (\log(x) - 1) + C && \text{für } b > 0, x > 0. \\
\int \sinh(x) \, dx &= \cosh(x) + C \\
\int \cosh(x) \, dx &= \sinh(x) + C \\
\int \tanh(x) \, dx &= \log(\cosh(x)) + C \\
\int \coth(x) \, dx &= \log(|\sinh(x)|) + C && \text{für } x \neq 0.
\end{aligned}
$$

Wichtige Integrationsregeln.

Satz (Linearität): *Sind* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stückweise stetig, so gilt*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. ■

Satz (Partielle Integration): *Sind* $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx$$

für unbestimmte Integrale, womit für bestimmte Integrale folgt

$$\int_a^b u(x)v'(x)\, dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\, dx.$$

Beweis: folgt direkt aus Produktregel der Differentiation: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. ■

Die Substitutionsregel.

Satz: *Ist* $h : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ *stetig differenzierbar und* $f : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig mit Stammfunktion* $F(x)$, *so gilt*

$$\int f(h(t))h'(t)\,dt = F(h(t)).$$

Für bestimmte Integrale erhält man somit

$$\int_a^b f(h(t))h'(t)\,dt = F(h(b)) - F(h(a)) = \int_{h(a)}^{h(b)} f(x)\,dx.$$

Beweis: folgt direkt aus Kettenregel der Differentiation:

$$\frac{d}{dt}(F(h(t))) = f(h(t)) \cdot h'(t).$$

■

Beispiele.

- Linearität:

$$\int (28x^3 + 12x^2 - 2x + 3)\,dx = 7x^4 + 4x^3 - x^2 + 3x + C$$

- Partielle Integration:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + C$$

- Partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int \log(x)\,dx &= \int 1 \cdot \log(x)\,dx \\ &= x \cdot \log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= x(\log(x) - 1) + C\end{aligned}$$

$\square$

Ein weiteres Beispiel zur partiellen Integration.

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2(x)\,dx &= \int \sin(x)\cdot\sin(x)\,dx \\
&= \sin(x)(-\cos(x)) + \int \cos^2(x)\,dx \\
&= -\sin(x)\cos(x) + \int (1-\sin^2(x))\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad 2\int \sin^2(x)\,dx &= -\sin(x)\cos(x) + x + C \\
\Longrightarrow \quad \int \sin^2(x)\,dx &= \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C
\end{aligned}
$$

$\square$

Ein Beispiel zur Substitutionsregel.

Substituiere $x = h(t) = a\cos(t)$ in

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1-(x/a)^2}\,dx = \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2(t)}(-a\sin(t))\,dt,$$

denn

$$dx = -a\sin(t)\,dt \qquad h(0) = a \quad \text{und} \quad h(\pi) = -a.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \sqrt{1-(x/a)^2}\,dx &= \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2(t)}\,(-a\sin(t))\,dt \\
&= a\int_{0}^{\pi} \sin^2(t)\,dt \\
&= \frac{a}{2}(t-\sin(t)\cos(t))\Big|_{0}^{\pi} = \frac{a\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$\square$

Ein weiteres Beispiel zur Substitutionsregel.

Substituiere $x = h(t) = t^2$, d.h. $t = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$ in

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^t\,2t\,dt$$

denn es gilt

$$h'(t) = 2t.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}}\,dx &= \int e^t\,2t\,dt \\ &= 2(t-1)e^t + C \\ &= 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C. \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung.

- Nicht jedes Integral lässt sich explizit “lösen”, d.h.
- nicht jede (integrierbare) Funktion besitzt “einfache” Stammfunktion bzw.
- manche Stammfunktionen lassen sich nicht durch Komposition von elementaren Funktionen darstellen.

Beispiele:

$$\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt \qquad (\texttt{Integralsinus})$$

$$\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad (\texttt{Fehlerfunktion})$$

$$E(x,k) := \int\limits_0^x (1-k^2\sin^2 t)^{\pm\frac{1}{2}}\,dt \qquad (\texttt{Elliptische Integrale})$$

$\square$

Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Satz: *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig,* $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar und* $p(x) \geq 0$ *für* $a \leq x \leq b$. *Dann existiert ein* $\xi \in [a,b]$ *mit*

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b p(x)\,dx.$$

Beweis: Da $f(x)$ stetig und $p(x) \geq 0$ folgt:

$$\min(f[a,b]) \cdot p(x) \leq f(x)p(x) \leq \max(f[a,b]) \cdot p(x).$$

Integration über $[a,b]$ liefert:

$$\min(f[a,b]) \cdot \int_a^b p(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)p(x)\,dx \leq \max(f[a,b]) \cdot \int_a^b p(x)\,dx.$$

Die Behauptung folgt dann aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen. ■

Mittelwertsatz der Integralrechnung: Spezialfall.

Für den Spezialfall $p \equiv 1$ gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$

Beobachtung: Schreibt man diese Beziehung als

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a)$$

mit der Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, so folgt der `Mittelwertsatz der Differentialrechnung` für die Stammfunktion $F(x)$:

$$F'(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \qquad \text{für ein } \xi \in [a, b].$$

$\square$

Der Satz von Taylor. Man erhält die Taylor-Entwicklung einer Funktion $f \in C^{n+1}$ um x_0 durch n-fache partielle Integration:

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} (x-t)^0 f'(t)\,dt \\
&= (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)^1 f''(t)\,dt \\
&= (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} (x-t)^2 f'''(t)\,dt \\
&\;\vdots \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Daraus bekommt man die Lagrange-Restgliedformel aus Mittelwertsatz:

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1} \qquad \text{für ein } \xi \in [x_0, x].$$

10.4 Integration rationaler Funktionen

Ziel: Integration rationaler Funktionen

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{wobei} \quad p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k.$$

Methode: Partialbruch-Zerlegung von rationaler Funktion $R(x)$.

Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) \quad &= \quad p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\ &\quad + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1} x + \delta_{j1}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j} x + \delta_{jk_j}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^{k_j}} \right] \end{aligned}$$

Erläuterungen.

- Ohne Einschränkung: $p(x)$ und $q(x)$ haben keine gemeinsamen Nullstellen.
- Das Polynom $p_1(x)$ tritt nur auf, falls

$$\deg(p) \geq \deg(q).$$

In diesem Fall berechnet man $p_1(x)$ mit Polynomdivision, und es gilt

$$\frac{p_2(x)}{q(x)} = R(x) - p_1(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad p(x) = p_1(x) \cdot q(x) + p_2(x),$$

mit $\deg(p_2) < \deg(q)$.

- Das Nennerpolynom $q(x)$ besitze
  - die **reellen** Nullstellen x_j mit Vielfachheit k_j;
  - die **komplexen** Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$ mit Vielfachheit k_j und damit komplex konjugierte Nullstellen $\bar{z}_j = a_j - ib_j$.

Ansatz der Partialbruch-Zerlegung.

$$R(x) = p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right]$$
$$+ \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^{k_j}} \right]$$

Unbekannte Parameter, die bestimmt werden müssen:

$$\begin{aligned} \alpha_{j\ell}, \quad & j = 1, \ldots, n_1, \ \ell = 1, \ldots, k_j; \\ \gamma_{j\ell}, \quad & j = n_1+1, \ldots, n_2, \ \ell = 1, \ldots, k_j; \\ \delta_{j\ell}, \quad & j = n_1+1, \ldots, n_2, \ \ell = 1, \ldots, k_j. \end{aligned}$$

Diese Parameter werden durch Koeffizientenvergleich berechnet, die rechte Seite wird dabei auf den Hauptnenner gebracht.

Beispiel. Betrachten die rationale Funktion

$$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$$

- Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{x^2+1} \\ \Rightarrow \quad 1-x &= x(x^2+1)\alpha_1 + (x^2+1)\alpha_2 + x^2(\gamma_1 x + \delta_1) \end{aligned}$$

- Ausmultiplizieren:

$$1-x = (\alpha_1+\gamma_1)x^3 + (\alpha_2+\delta_1)x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

- Koeffizientenvergleich:

$$\alpha_1+\gamma_1 = 0, \quad \alpha_2+\delta_1 = 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1$$

- Partialbruchzerlegung:

$$R(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Bei der Integration rationaler Funktionen gibt es 4 Grundtypen:

Typ I: Polynome:

$$\int \sum_{k=0}^{s} c_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{s} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

Typ II: Inverse Potenzen:

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^\ell} = \begin{cases} \log(|x-x_0|) + C & \text{für } \ell = 1 \\ \dfrac{1}{1-\ell} \cdot \dfrac{1}{(x-x_0)^{\ell-1}} + C & \text{für } \ell = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Typ III:

$$I_\ell := \int \frac{1}{(x^2+1)^\ell}\,dx \qquad \text{für } \ell \in \mathbb{N}$$

- Für $\ell = 1$ gilt

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x) + C$$

- Für $\ell > 1$ kann man I_ℓ wie folgt *rekursiv* berechnen.

$$I_\ell = \frac{1}{2(1-\ell)}\left[(3-2\ell)I_{\ell-1} - \frac{x}{(x^2+1)^{\ell-1}}\right] \qquad \text{für } \ell = 2, 3, \ldots .$$

Herleitung der Rekursion.

- Substitution: Setze $u = x^2 + 1$ in

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{(x^2+1)^\ell}\,dx &= \int \frac{du}{u^\ell} = \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{u^{\ell-1}} + C\\ &= \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}} + C\end{aligned}$$

- Partielle Integration:

$$\begin{aligned}I_{\ell-1} &= \int \frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^\ell}\,dx = \int \frac{x}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^\ell}\,dx + I_\ell\\ &= \frac{x}{2(1-\ell)(x^2+1)^{\ell-1}} - \frac{1}{2(1-\ell)}\cdot I_{\ell-1} + I_\ell\end{aligned}$$

Somit:

$$I_\ell = \frac{1}{2(1-\ell)}\left[(3-2\ell)I_{\ell-1} - \frac{x}{(x^2+1)^{\ell-1}}\right] \qquad \text{für } \ell = 2, 3, \ldots. \quad \blacksquare$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Typ IV:

$$\int \frac{cx+d}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx = \frac{c}{2}\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx + (d+ca)\int \frac{dx}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}$$

- Erstes Integral:

$$\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx = \int \frac{du}{u^\ell} \qquad \text{mit } u=(x-a)^2+b^2.$$

$$= \begin{cases} \log\left(|(x-a)^2+b^2|\right)+C & \text{für } \ell=1 \\ \dfrac{1}{1-\ell}\cdot\dfrac{1}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\ell-1}}+C & \text{für } \ell=2,3,\ldots \end{cases}$$

- Zweites Integral:

$$\int \frac{dx}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell} = \frac{1}{b^{2\ell-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^\ell} \qquad \text{mit} \qquad t=\frac{x-a}{b}.$$

Beispiel.

Betrachten erneut die rationale Funktion

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1-x}{x^2(x^2+1)} \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1} \end{aligned}$$

Somit bekommt man

$$\begin{aligned} \int R(x)\,dx &= -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= -\log(|x|) - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \arctan(x) + C \end{aligned}$$

■

Substitution bei verwandten Integralen.

Sei $R(x)$ eine rationale Funktion.

Dann lassen sich die folgenden Integrale durch Substitution vereinfachen.

- Setze $t = e^x$ in
$$\int R(e^x)\,dx = \int \frac{R(t)}{t}\,dt$$

- Mit $t = \tan(x/2)$ bekommt man
$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{und} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$
und somit durch Substitution in
$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$\square$

10.5 Uneigentliche Integrale

Ziel: Berechne `uneigentliche Integrale`, d.h.

- Integrale über unbeschränkten Bereichen

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx.$$

- Integrale über unbeschränkten Funktionen mit Singularitäten am Rand

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{wobei } f : (a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \quad \text{oder} \quad f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$

Lokale Integrierbarkeit und uneigentliche Integrale.

Definition: *Eine Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit* $D \subset \mathbb{R}$ *heißt* `lokal integrierbar`, *falls* f *über jedem kompakten Teilintervall* $[a, b] \subset D$ *integrierbar ist.* □

Definition: *Ist eine Funktion* $f(x)$ *lokal integrierbar über* $[a, \infty)$ *bzw.* $(-\infty, b]$ *bzw.* $(-\infty, \infty)$, *so definiert man*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{y\to\infty} \int_a^y f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{y\to-\infty} \int_y^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx \qquad \text{für } a \in \mathbb{R}.$$

□

Lokale Integrierbarkeit und uneigentliche Integrale.

Definition: Ist eine Funktion $f(x)$ lokal integrierbar über $(a, b]$ bzw. $[a, b)$ bzw. (a, b), so definiert man

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad := \quad \lim_{y \to a+} \int_y^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad := \quad \lim_{y \to b-} \int_a^y f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad := \quad \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \text{für } c \in (a, b).$$

Ein Beispiel.

Betrachte das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

Wegen

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}\,\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} + C & \text{für } \alpha > 1 \\[2ex] \log(|x|) + C & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$$

konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha = 1$. ■

Ein weiteres Beispiel. Betrachte das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2}\, dx.$$

Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2}\, dx = -\int_{-\infty}^{0} x e^{-x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} x e^{-x^2}\, dx = 2\int_{0}^{\infty} x e^{-x^2}\, dx,$$

und weiterhin

$$\begin{aligned} \int_0^y x e^{-x^2}\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{y^2} e^{-u}\, du \qquad\qquad \text{mit } u = x^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-y^2}\right) \to \frac{1}{2} \qquad \text{für } y \to \infty. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2}\, dx = 1$$

■

Konvergenzkriterien.

Satz: *Sei* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *lokal integrierbar. Dann gilt:*

(a) Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *existiert genau dann, wenn gilt*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;:\; \exists\, C > a \;:\; \forall\, z_1, z_2 > C \;:\; \left| \int_{z_1}^{z_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

(b) Ist das uneigentliche Integral **absolut konvergent**, *d.h.*

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

konvergiert, so konvergiert auch das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

□

Majorantenkriterium.

Satz: *Sei* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *lokal integrierbar. Dann gilt:*

(c)

$$\forall x \; : \; |f(x)| \le g(x) \;\; \textit{und} \;\; \int_a^\infty g(x)\,dx \quad \textit{konvergent}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \textit{absolut konvergent}$$

(d) Weiterhin gilt folgende Umkehrung:

$$\forall x \; : \; 0 \le g(x) \le f(x) \;\; \textit{und} \;\; \int_a^\infty g(x)\,dx \quad \textit{divergent}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \textit{divergent.}$$

$\square$

Beispiel: Das Dirichlet-Integral

Betrachte das Dirichlet-Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

Das Dirichlet-Integral ist konvergent, denn es gilt

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = -\frac{\cos(x)}{x}\bigg|_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$$

und somit

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx\right| \le \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{2}{y_1} \to 0 \quad \text{für } y_1 \to \infty.$$

$\square$

Bemerkungen:

- Das Dirichlet-Integral ist *nicht* absolut konvergent;
- Das Dirichlet-Integral besitzt den Wert $I = \pi/2$. $\square$

Beispiel: Das Exponentialintegral

- Betrachte das Exponentialintegral

$$\mathrm{Ei}(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt \qquad \text{für } x < 0.$$

Wegen $\lim_{t \to -\infty} te^t = 0$ gibt es ein $C > 0$ mit $|te^t| \le C$ für alle $t \in (-\infty, x]$, und somit gilt

$$\left| \frac{e^t}{t} \right| = \frac{|te^t|}{t^2} \le \frac{C}{t^2}.$$

Mit der Konvergenz des Integrals

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2}\, dt$$

folgt die *absolute Konvergenz* des Exponentialintegrals $\mathrm{Ei}(x)$ für alle $x < 0$ aus dem Majorantenkriterium. ■

Beispiel: Die Gamma-Funktion.

Die Gamma-Funktion $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \qquad \text{für } x > 0.$$

Beachte: Für $0 < x < 1$ ist der Integrand von $\Gamma(x)$ singulär. Mit

$$\left|e^{-t} t^{x-1}\right| \le t^{x-1} \qquad \text{für } 0 < t \le 1$$

folgt jedoch in diesem Fall

$$\int_\varepsilon^1 t^{x-1}\, dt = \frac{1}{x} t^x \Big|_{t=\varepsilon}^{t=1} = \frac{1}{x}\left(1 - \varepsilon^x\right) \to \frac{1}{x} \qquad \text{für } \varepsilon \to 0+.$$

Die Konvergenz bei $t = \infty$ zeigt man wie beim Exponentialintegral:

$$\left|e^{-t} t^{x-1}\right| = \left|\frac{e^{-t} t^{x+1}}{t^2}\right| \le \frac{C}{t^2} \qquad \text{für } 1 \le t \le \infty.$$

Mit dem Majorantenkriterium folgt die absolute Konvergenz von $\Gamma(x)$ für $x > 0$.

Weitere Bemerkungen zur Gamma-Funktion.

Die Gamma-Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \qquad x > 0$$

und es gilt

$$\Gamma(1) = 1.$$

$\square$

Folgerung: Es gilt

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$\blacksquare$

10.6 Parameterabhängige Integrale

Beispiel: Die Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty f(x,t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt.$$

Zunächst: Parameterabhängige *eigentliche* Integrale.

Sei $f : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, so dass f für festes $x \in I$ als Funktion von y integrierbar über $[a,b]$ ist:

$$F(x) := \int_a^b f(x,y)\,dy.$$

Fragen:

- Ist die Funktion $F(x)$ *stetig*, wenn $f(x,y)$ stetig ist?
- Ist die Funktion $F(x)$ *differenzierbar*, wenn $f(x,y)$ nach x differenzierbar?

Stetigkeit parameterabhängiger Integrale.

Satz: *Ist* $f(x,y)$ *stetig auf* $I \times [a,b]$, *so existiert das Integral*

$$F(x) := \int_a^b f(x,y)\,dy$$

für alle $x \in I$, *und* $F(x)$ *ist stetig auf* I.

Beweis: Sei $x_0 \in I_0 \subset I$, so dass $I_0 \subset I$ kompakt. Dann ist $f(x,y)$ auf dem Kompaktum $I_0 \times [a,b]$ gleichmäßig stetig. Daher gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x,y) - f(x_0,y)| < \varepsilon \qquad \text{für } x, x_0 \in I_0 \text{ und alle } y \in [a,b].$$

Mit diesem δ und $|x - x_0| < \delta$ für $x, x_0 \in I_0$ folgt dann

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^b (f(x,y) - f(x_0,y))\,dy \right| \leq \int_a^b |f(x,y) - f(x_0,y)|\,dy < \varepsilon(b-a).$$

Somit ist F stetig in x_0. Da x_0 beliebig gewählt, ist F auf ganz I stetig. $\blacksquare$

Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale.

Satz: *Ist* $f(x, y)$ *stetig auf* $I \times [a, b]$ *und nach* x *stetig (partiell) differenzierbar, so ist auch* $F(x)$ *auf dem Intervall* I *stetig differenzierbar, und es gilt*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy.$$

Beweis: Für $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$, folgt mit dem Mittelwertsatz

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0}\, dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\, dy \qquad \text{für ein } \xi \in [x_0, x],$$

und damit weiterhin

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_a^b \lim_{\xi \to x_0} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\, dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)\, dy.$$

Somit ist F differenzierbar in x_0.

Da x_0 beliebig gewählt, ist F auf ganz I differenzierbar. ■

Zwei Beispiele. Beispiel 1:

$$F(x) = \int_1^\pi \frac{\sin(tx)}{t}\, dt \quad \Longrightarrow \quad F'(x) = \int_1^\pi \cos(tx)\, dt.$$

Beispiel 2: Die Bessel-Funktion

$$\begin{aligned} J_n(x) &:= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(t) - nt)\, dt, \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}, \\ J_n'(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\cdot\sin(x\sin(t) - nt)\, dt, \\ J_n''(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(t)\cdot\cos(x\sin(t) - nt)\, dt. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Bessel-Funktion $J_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, ist (eine) Lösung der Besselschen Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Übung (mit partieller Integration). $\square$

Parameterabhängige uneigentliche Integrale.

$$F(x) := \int_a^\infty f(x,y)\,dy \qquad \text{für } x \in I.$$

Beispiel: Die Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt.$$

Definition: *Das uneigentliche Integral*

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy \qquad \textit{für } x \in I$$

heißt `gleichmäßig konvergent`, *falls es zu* $\varepsilon > 0$ *eine Konstante* $C > a$ *gibt mit*

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy \right| < \varepsilon \qquad \textit{für alle } x \in I \textit{ und für alle } y_1, y_2 \geq C.$$

□

Das Majorantenkriterium.

Bemerkung: Es gilt das Majorantenkriterium, wonach das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy$$

gleichmäßig und absolut konvergiert, falls es eine (gleichmäßige) Majorante $g(y)$ von $f(x,y)$ gibt mit

$$|f(x,y)| \leq g(y) \quad \text{und} \quad \int_a^\infty g(y)\,dy < \infty \qquad \text{für alle } x,y \in I.$$

Beweis:

$$\left|\int_a^\infty f(x,y)\,dy\right| \leq \int_a^\infty |f(x,y)|\,dy \leq \int_a^\infty g(y)\,dy < \infty.$$

■

Differenzierbarkeit und gleichmäßige Konvergenz.

Satz: *Sei* $f(x,y)$ *stetig und nach* x *stetig (partiell) differenzierbar. Weiterhin seien die uneigentlichen Integrale*

$$F(x) := \int_a^\infty f(x,y)\,dy \quad \textit{und} \quad \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$

auf (allen) kompakten Teilmengen von I *gleichmäßig konvergent. Dann ist* $F(x)$ *stetig differenzierbar, und die Ableitung* $F'(x)$ *von* $F(x)$ *läßt sich durch Differentiation unter dem Integralzeichen gewinnen, d.h. es gilt*

$$F'(x) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

Beweis: Analog wie im Fall von eigentlichen Integralen. □

Beispiel: Die Ableitung der Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt \qquad \Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\cdot\log(t)\,dt.$$

11 Anwendungen der Integralrechnung

11.1 Rotationskörper

Betrachte für eine Funktion $f(x)$ die Rotation des Funktionsgraphen $y = f(x)$ um die x-Achse über dem Intervall $[a, b]$.

Dann gilt für die Querschnittsfläche

$$Q(x) = \pi(f(x))^2 \qquad \text{für } x \in [a, b].$$

Damit ergibt sich für den entstehenden Rotationskörper die Volumenformel

$$V_{\text{rot}} = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx.$$

Prinzip von Cavalieri: Haben zwei Körper die jeweils gleiche Querschnittsfläche, so stimmen ihre Volumina überein. □

Beispiel. Durch die Rotation der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{mit } a, b > 0$$

um die x-Achse erhält man ein Rotationsellipsoid mit dem Volumen

$$\begin{aligned} V_{\text{rot}} &= \pi \int_{-a}^{a} \left[b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right]^2 dx \\ &= \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \\ &= \frac{4}{3}\pi a b^2. \end{aligned}$$

Speziell bekommt man für $a = b = r$ das Volumen

$$V_{\text{rot}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

der Kugel um Null mit Radius $r > 0$. $\square$

Die Oberfläche eines Rotationskörpers.

Für die Oberfläche (Mantelfläche) eines Rotationskörpers gilt die Formel

$$O_{\text{rot}} = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$

$\square$

Beispiel: Für die Oberfläche der Kugel um Null mit Radius $r > 0$ gilt mit

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

die Formel

$$O_{\text{rot}} = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 4\pi r^2.$$

$\square$

11.2 Kurven und Bogenlänge

Definition: *Sei* $c = (c_1, \ldots, c_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *eine stetige Funktion.*

- *Dann wird* c *als* `Kurve` *im* $\mathbb{R}^n$ *bezeichnet;* $c(a)$ *heißt* `Anfangspunkt`, $c(b)$ *heißt* `Endpunkt` *von* c. c *heißt* `geschlossene Kurve`, *falls* $c(a) = c(b)$.
- *Falls* $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *eine* C^1*-Funktion, d.h. jede Koordinatenfunktion* $c_j(t)$ *ist stetig differenzierbar, so heißt* $c(t)$ *eine* `C^1-Kurve`.
- $c(t)$ *heißt* `stückweise C^1-Kurve`, *falls es eine Zerlegung*
$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$$
gibt, so dass $c(t)$ *auf jedem Teilintervall* $[t_j, t_{j+1}]$ *eine* C^1*-Funktion ist.*
- *Die Kurve* c *heißt* `glatt`, *falls*
$$\frac{d}{dt}c(t) := \dot{c}(t) = (c_1'(t), \ldots, c_n'(t))^T \neq 0 \qquad \text{für alle } t \in [a, b].$$

$\square$

Beispiele:

- Die Kurve

$$c(t) := (\cos(t), \sin(t))^T \qquad t \in [0, 2\pi]$$

  beschreibt einen **Kreis** im $\mathbb{R}^2$.

- Die Kurve

$$c(t) = (r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t)))^T$$

  beschreibt eine **Zykloide**.

  Wegen

$$\dot{c}(t) = (r(1 - \cos(t)), r \sin(t))^T$$

  ist die Kurve an den Stellen $t = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, nicht glatt.

- Die Kurve

$$c(t) = (r \cos(2\pi t), r \sin(2\pi t), ht)^T \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

  beschreibt eine **Schraubenlinie** (**Helix**) mit Radius r und **Ganghöhe** h.

Umparametrisierung von Kurven.

Ist $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine stetige, bijektive und monoton wachsende Abbildung, so hat die Kurve

$$(c \circ h)(\tau) = c(h(\tau)) \qquad \text{für } \alpha \leq \tau \leq \beta$$

die gleiche Gestalt und den gleichen Durchlaufsinn wie die Kurve c.

Bemerkungen:

- Man nennt $t = h(\tau)$ eine `Umparametrisierung` (`Parameterwechsel`). Die Kurven c und $c \circ h$ werden als gleich angesehen.
- Im Fall einer C^1-Kurve werden nur C^1-Parameterwechsel zugelassen.
- Jede stetige Funktion $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ beschreibt eine Kurve mit

$$c(x) := (x, f(x))^T \qquad \text{für } a \leq x \leq b$$

bzw. $c(t) := (a + t(b - a), f(a + t(b - a)))^T$ für $0 \leq t \leq 1$.

Die Bogenlänge einer Kurve.

Sei $Z = \{a = t_0 < t_1 \ldots < t_m = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so ist

$$L(Z) := \sum_{j=0}^{m-1} \|c(t_{j+1}) - c(t_j)\|$$

eine untere Schranke für die Bogenlänge der Kurve $c(t)$.

Definition: *Ist die Menge* $\{L(Z) \, : \, Z \in \mathbf{Z}[a, b]\}$ *nach oben beschränkt, so heißt die Kurve* c rektifizierbar*, und in diesem Fall ist*

$$L(c) := \sup\{L(Z) \, : \, Z \in \mathbf{Z}[a, b]\} = \lim_{\|Z\| \to 0} L(Z)$$

die Länge *der Kurve* c*.* □

Berechnung der Bogenlänge einer C^1-Kurve.

Satz: *Jede C^1-Kurve ist rektifizierbar, und es gilt*

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, dt$$

Beweisidee: *Zunächst gilt die Darstellung*

$$L(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j))^2}$$

und nach dem Mittelwertsatz gibt es Zahlen τ_{k_j} mit $t_j \leq \tau_{k_j} \leq t_{j+1}$, so dass

$$c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j) = c_k'(\tau_{k_j}) \cdot (t_{j+1} - t_j),$$

somit

$$L(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (c_k'(\tau_{k_j}))^2} \cdot (t_{j+1} - t_j) \right). \qquad \blacksquare$$

Beispiel.

Berechnen die Länge eines Zykloidenbogens

$$c(t) = (r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t)))^T \qquad \text{für } 0 \le t \le 2\pi$$

mit

$$\begin{aligned}
\dot{c}(t) &= (r(1 - \cos(t)), r\sin(t))^T \\
\|\dot{c}(t)\| &= r\sqrt{(1-\cos(t))^2 + \sin^2(t)} = 2r\sin(t/2) \\
L(c) &= 2r\int_0^{2\pi} \sin(t/2)\,dt = 8r
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Bogenlänge einer C^1–Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung, denn es gilt

$$L(c \circ h) = \int_\alpha^\beta \|\dot{c}(h(\tau))h'(\tau)\|\,d\tau = \int_\alpha^\beta \|\dot{c}(h(\tau))\|h'(\tau)\,d\tau = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|\,dt = L(c)$$

$\square$

Die Bogenlängenfunktion einer C^1-Kurve.

Definition: *Sei* $c : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine* C^1*–Kurve.*

- *Die Funktion*

$$S(t) := \int_a^t \|\dot{c}(\tau)\| \, d\tau$$

heißt die Bogenlängenfunktion *von* c*.*

- *Ist* c *glatt, so ist* $S : [a, b] \to [0, L(c)]$ *ein* C^1*-Parameterwechsel.*

- *Die Umkehrabbildung* $t = S^{-1}(s)$, $0 \leq s \leq L(c)$, *ist dann ebenfalls ein* C^1*-Parameterwechsel.*

- *Die Parametrisierung*

$$\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s)) \qquad \text{für } 0 \leq s \leq L(c)$$

von c *nennt man die* Parametrisierung nach der Bogenlänge*.* □

Eigenschaften der Bogenlängenparametrisierung.

Bemerkung: Für die Bogenlängenparametrisierung $\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s))$ gilt:

- Die Ableitung von $\tilde{c}(s)$ ist gegeben durch

$$\tilde{c}'(s) = \dot{c}(S^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\|\dot{c}(S^{-1}(s))\|}$$

  Daher ist $\tilde{c}'(s)$ ist ein Einheitsvektor, d.h. mit dieser Parametrisierung wird die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen. Weiterhin ist $\tilde{c}'(s)$ der Einheitstangentenvektor von c.

- Aus $\langle \tilde{c}'(s), \tilde{c}'(s) \rangle = 1$ folgt durch Differentiation

$$\langle \tilde{c}''(s), \tilde{c}'(s) \rangle = 0$$

  d.h. der Beschleunigungsvektor $\tilde{c}''(s)$ bezüglich der Bogenlänge steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\tilde{c}'(s)$.

$\square$

Hauptnormale und Krümmung.

Definition: *Sei* $\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s))$ *die Bogenlängenparametrisierung der Kurve* c.

- *Dann bezeichnet man den Vektor*

$$n(s) := \frac{\tilde{c}''(s)}{\|\tilde{c}''(s)\|}$$

  als den **Hauptnormalenvektor** *von* c.

- *Die Funktion*

$$\kappa(s) := \|\tilde{c}''(s)\| \qquad \text{für } 0 \leq s \leq L(c)$$

  nennt man die **Krümmung** *von* c. □

Beispiel: Mit der Parametrisierung des Einheitskreises nach der Bogenlänge:

$$\begin{aligned}
\tilde{c}(s) &= (\cos(s), \sin(s)) \qquad \text{für } 0 \leq s \leq 2\pi \\
n(s) &= \tilde{c}''(s) = -(\cos(s), \sin(s)) \\
\kappa(s) &\equiv 1
\end{aligned}$$

Parametrisierungen von Funktionsgraphen.

Betrachte Graph von $y = y(x)$ als Kurve im $\mathbb{R}^2$, d.h. $c(x) = (x, y(x))^T$. Dann:

$$c'(x) = (1, y'(x))^T \qquad ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx \qquad \kappa(x) = \frac{|y''(x)|}{\left(\sqrt{1+(y'(x))^2}\right)^3}$$

Betrachte analog für $y(x)$ und $z(x)$ die Kurve $c(x) = (x, y(x), z(x))^T \in \mathbb{R}^3$:

$$c'(x) = (1, y'(x), z'(x))^T$$

$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2}\,dx \qquad (\text{Bogenlängenelement})$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2}\,dx$$

$$\kappa(x) = \frac{\sqrt{(1 + (y')^2 + (z')^2)((y'')^2 + (z'')^2) - (y'y'' + z'z'')^2}}{\sqrt{(1 + (y')^2 + (z')^2)}}$$

Polarkoordinaten und Kugelkoordinaten.

- Für die Polarkoordinaten $r \equiv r(t), \varphi \equiv \varphi(t)$ im $\mathbb{R}^2$ gilt:

$$
\begin{aligned}
c(t) &= (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))^T \qquad \text{für } a \le t \le b \\
L(c) &= \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}\, dt.
\end{aligned}
$$

- Für die Kugelkoordinaten $r \equiv r(t), \varphi \equiv \varphi(t), \psi \equiv \psi(t)$ im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$
\begin{aligned}
c(t) &= (r\cos(\varphi)\cos(\psi), r\sin(\varphi)\cos(\psi), r\sin(\psi))^T \qquad \text{für } a \le t \le b \\
L(c) &= \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2(\psi) + r^2\dot{\psi}^2}\, dt.
\end{aligned}
$$

□

Beispiel: Kardioide in Polarkoordinaten.

Betrachte die Kardioide (Herzlinie) in Polarkoordinaten:

$$r = a(1 + \cos(\varphi)) \qquad \text{für } a > 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Für den Umfang (d.h. Bogenlänge) der Kardioide gilt:

$$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(\varphi) + a^2(1 + \cos(\varphi))^2}\, d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \left|\cos \frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 8a$$

□

Die von einer Kurve umschlossene Fläche.

Satz: *Für die von einer* C^1*-Kurve* $c(t) = (x(t), y(t))^T \in \mathbb{R}^2$ *überstrichene Fläche gilt:*

$$F(c) = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) \, dt$$

Beweisskizze: Summiere für eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ über die Flächen

$$|F_i| = \frac{1}{2}\|c(t_i) \times c(t_{i+1})\| = \frac{1}{2}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \qquad \text{für } 0 \le i \le m-1.$$

$$\begin{aligned}
\curvearrowright F(Z) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}(x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i}{t_{i+1} - t_i}\Delta t_i \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(x_i\frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i}y_i\right)\Delta t_i \\
&\to \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) \, dt. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Beispiel: Die Archimedische Spirale.

Die Archimedische Spirale ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$x = a\,\varphi\,\cos(\varphi), \quad y = a\,\varphi\,\sin(\varphi), \qquad \text{für } a > 0,\ \varphi \in \mathbb{R}$$

Berechnung des Umfangs (Bogenlänge) und der Fläche der innersten Schleife:

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 + a^2\varphi^2}\,d\varphi \\ &= \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \log\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \approx 4.158a \end{aligned}$$

und mit

$$x\dot{y} - \dot{x}y = r^2\dot{\varphi}$$

gilt

$$F = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi^2\,d\varphi \approx 1.292a^2.$$

□

11.3 Kurvenintegrale

Definition: *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, *eine stetige Funktion und* $c : [a, b] \to D$ *eine stückweise* C^1*-Kurve. Dann wird das* Kurvenintegral *(*Linienintegral*) von* $f(x)$ *längs* c *definiert durch*

$$\int_c f(x)\,ds := \int_a^b f(c(t))\,\|\dot{c}(t)\|\,dt.$$

Notation: Für eine **geschlossene** Kurve c schreibt man auch

$$\oint_c f(s)\,ds.$$

Parametrisierungsinvarianz von Kurvenintegralen.

Satz: *Das Kurvenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve.*

Beweis: Für einen Parameterwechsel $h : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ einer Kurve c gilt

$$\begin{aligned}\int_{c\circ h} f(x)\, ds &= \int_{\alpha}^{\beta} f(c(h(\tau))) \left\| \frac{d}{d\tau} c(h(\tau)) \right\| d\tau \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(c(h(\tau)))\, \|\dot{c}(h(\tau))\|\, h'(\tau)\, d\tau \\ &= \int_{a}^{b} f(c(t))\, \|\dot{c}(t)\|\, dt \\ &= \int_{c} f(x)\, ds\end{aligned}$$

■

Beispiel. Betrachte einen krummlinigen mit Masse belegten Draht, beschrieben durch eine C^1-Kurve c und mit der (inhomogenen) Massendichte ρ.

- Für die Gesamtmasse des Drahtes bekommt man

$$\int_c \rho(x)\, ds := \int_a^b \rho(c(t))\, \|\dot{c}(t)\|\, dt.$$

- Der Schwerpunkt des Drahtes liegt bei

$$x_S = \frac{\int_c \rho(x) x\, ds}{\int_c \rho(x)\, ds}$$

- Das Trägheitsmoment des Drahtes ist gegeben durch

$$\theta = \int_c \rho(x) r^2(x)\, ds$$

wobei $r(x)$ der Abstand von der Drehachse ist. □

12 Fourier-Analysis

12.1 Grundlegende Begriffe

Definition: *Eine Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(oder* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*) heißt* `periodisch mit der Periode T` *(oder* `T-periodisch`*), falls*

$$f(t+T) = f(t) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

□

Ziel: Entwicklung einer periodischen Funktion f in eine `Fourier-Reihe`

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right]$$

Grundschwingungen: $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$

Oberschwingungen: $\cos(k\omega t)$, $\sin(k\omega t)$, $k = 2, 3, \ldots$

Bemerkungen.

- Ist T eine Periode von f, so auch kT, $k \in \mathbb{Z}$, eine Periode von f.
- Sind T_1 und T_2 Perioden von f, so sind auch

$$k_1 T_1 + k_2 T_2 \qquad \text{für } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

  Perioden von f.
- Existiert eine kleinste positive Periode $T > 0$ von f, so ist die Menge der Perioden von f gegeben durch kT, $k \in \mathbb{Z}$. Jede nichtkonstante, stetige und periodische Funktion f besitzt eine solche kleinste Periode.
- Sind f und g T-periodisch, so ist auch $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, T-periodisch.
- Ist f T–periodisch und integrierbar (über kompakten Intervallen), so gilt

$$\int_0^T f(t)\, dt = \int_a^{a+T} f(t)\, dt$$

  für beliebige $a \in \mathbb{R}$.

Periodische Fortsetzungen.

Definition: *Eine Funktion* $g(t)$, $t \in [0, T]$ *bzw.* $t \in [0, T/2]$ *läßt sich zu einer* T*-periodischen Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *wie folgt fortsetzen.*

- Direkte Fortsetzung.

$$f(t) := g(t - kT) \qquad \textit{für } kT \leq t < (k+1)T$$

- Gerade Fortsetzung. *Sei* $g(t)$ *auf* $[0, T/2]$ *gegeben. Dann setze*

$$f(t) := g(t - kT) \qquad \textit{für } \left(\frac{2k-1}{2}\right)T \leq t < \left(\frac{2k+1}{2}\right)T,$$

wobei g *zunächst an der* y*-Achse gespiegelt wird:*

$$g(t) := g(-t), \qquad \textit{für } -\frac{T}{2} \leq t < 0.$$

- Ungerade Fortsetzung. *Wie oben, aber Spiegelung um Ursprung:*

$$g(t) := -g(-t), \qquad \textit{für } -\frac{T}{2} \leq t < 0.$$

Fourier-Reihen und trigonometrische Polynome.

Definition:

- *Eine Reihe der Form*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \qquad \textit{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R} \textit{ (oder } \mathbb{C}\textit{)}$$

  heisst Fourier-Reihe *(oder* trigonometrische Reihe*). Dabei sei*

$$\omega = \frac{2\pi}{T} > 0.$$

- *Die zugehörigen Partialsummen*

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \qquad \textit{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R} \textit{ (oder } \mathbb{C}\textit{)}$$

  der Fourier-Reihe $f(t)$ *heißen* trigonometrische Polynome *vom Grad* n.

□

Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe.

- Es gilt die Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

womit

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \qquad \text{und} \qquad \sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

- Damit lassen sich die trigonometrischen Polynome wie folgt darstellen.

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k}{2}\left(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}\right) + \frac{b_k}{2i}\left(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}\right)\right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t}\right] \end{aligned}$$

Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe.

- Somit kann man die trigonometrischen Polynome schreiben als

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

mit den Koeffizienten

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}a_0, \qquad \gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \qquad \gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k),$$

womit gilt

$$a_0 = 2\gamma_0, \qquad a_k = \gamma_k + \gamma_{-k}, \qquad b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k}).$$

- Für die Darstellung der Fourier-Reihe bekommt man somit

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Wichtige Frage: Konvergiert die Fourier-Reihe (punktweise oder gleichmäßig)?

Orthonormalität der Basisfunktionen.

Satz: *Die Funktionen* $e^{ik\omega t}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\omega = 2\pi/T$, *bilden ein* `Orthonormalsystem` *bezüglich des Skalarprodukts*

$$\langle u, v \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T \overline{u(t)} v(t)\, dt.$$

Beweis: Einerseits

$$\langle e^{ik\omega t}, e^{ik\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-ik\omega t} e^{ik\omega t}\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T 1\, dt = 1,$$

andererseits

$$\langle e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\ell-k)\omega t}\, dt = \frac{1}{T} \frac{1}{i(\ell-k)\omega} e^{i(\ell-k)\omega t} \Big|_{t=0}^{t=T} = 0$$

für $k \neq \ell$. ■

Berechnung der Fourier-Koeffizienten.

Satz: *Konvergiert die Fourier-Reihe*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

auf $[0,T]$ *gleichmäßig gegen eine Funktion* f, *so ist* f *stetig und es gilt:*

$$\gamma_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}\,dt \qquad \textit{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Da f_n stetig und gleichmäßig gegen f konvergieren, ist f stetig. Weiterhin:

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)e^{-i\ell\omega t}\,dt &= \int_0^T \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k e^{ik\omega t}e^{-i\ell\omega t}\,dt \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k \int_0^T e^{ik\omega t}e^{-i\ell\omega t}\,dt = \gamma_\ell \cdot T. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Orthonormalität und Fourier-Koeffizienten in $\mathbb{R}$.

$$\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \quad k \neq \ell \\ T/2 & : \quad k = \ell \neq 0 \\ T & : \quad k = \ell = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(\ell\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \quad k \neq \ell \\ T/2 & : \quad k = \ell \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \qquad \text{für } k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt \qquad \text{für } k > 0$$

12.2 Fourier-Reihen

Definition:

- *Eine Funktion* $f : [a, b] \to C$ *heißt* stückweise stetig *bzw.* stückweise stetig differenzierbar, *falls* $f(t)$ *bis auf endlich viele Stellen auf* $[a, b]$ *stetig bzw. stetig differenzierbar ist und in diesen Ausnahmepunkten die einseitigen Grenzwerte von* $f(t)$ *bzw.* $f'(t)$ *existieren.*

- *Für eine stückweise stetige Funktion* $f : [0, T] \to \mathbb{C}$ *werden die* Fourier-Koeffizienten *von* $f(t)$ *definiert durch*

$$\gamma_k := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} \, dt \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

Dabei ist $\omega = 2\pi/T$ *die* Kreisfrequenz. □

Bemerkung: Mit den (komplexen) Fourier-Koeffizienten γ_k bekommt man die (reellen) Fourier-Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
a_k &:= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \qquad \text{für } k \geq 0\\
b_k &:= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt \qquad \text{für } k > 0
\end{aligned}
$$

Definition: *Die mit den Fourier-Koeffizienten gebildete Reihe*

$$F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

heißt die Fourier-Reihe *von* $f(t)$. □

Bemerkung: Bei der obigen Definition verwendet man die **direkte Fortsetzung** der Funktion $f : [0, T] \to \mathbb{C}$ zu einer T-periodischen Funktion. Notation:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}.$$

Satz: *Sei* $f(t)$ *eine stückweise stetige,* T*-periodische Funktion. Dann gilt:*

$$f(t) \text{ \textit{gerade}} \implies a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \text{\textit{und}} \quad b_k = 0$$

$$f(t) \text{ \textit{ungerade}} \implies a_k = 0 \quad \text{\textit{und}} \quad b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt.$$

Beweis: Beispielsweise gilt für f gerade (argumentiere für f ungerade analog):

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T}\int_0^{T} f(t)\sin(k\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{-T} f(-\tau)\sin(k\omega\tau)\,d\tau \\ &= -\frac{2}{T}\int_{-T}^{0} f(\tau)\sin(k\omega\tau)\,d\tau = -\frac{2}{T}\int_0^{T} f(\tau)\sin(k\omega\tau)\,d\tau = -b_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos(k\omega t)\,dt + \int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt\right] \\ &= \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} f(-\tau)\cos(k\omega\tau)\,dt + \int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt\right] = \frac{4}{T}\left[\int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt\right] \end{aligned}$$

Beispiel: Die Sägezahnfunktion.

Betrachte die Sägezahnfunktion

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \quad \text{für } t = 0 \text{ oder } t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \quad \text{für } 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Sägezahnfunktion ist ungerade, also gilt (mit $\omega = 1$)

$$a_k = 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2} \sin(kt)\, dt = \frac{1}{k}$$

und damit bekommt man die Fourier-Reihe

$$S(t) \sim \sin(t) + \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \ldots$$

Approximation der Sägezahnfunktion durch 10. Partialsumme

$$S_{10}(t) = \sum_{k=1}^{10} \frac{\sin(kt)}{k}.$$

Beispiel: Die Rechteckschwingung.

Betrachte die Rechteckschwingung

$$R(t) := \begin{cases} 0 & : \quad \text{für } t = 0, t = \pi \text{ oder } t = 2\pi \\ 1 & : \quad \text{für } 0 < t < \pi \\ -1 & : \quad \text{für } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Funktion ist ungerade, also gilt:

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \\ b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kt)\,dt = \begin{cases} 0 & : \quad \text{für } k \text{ gerade;} \\ \frac{4}{k\pi} & : \quad \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe von $R(t)$ lautet daher

$$R(t) \sim \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \ldots\right).$$

Noch ein Beispiel.

Betrachte $f(t) = t^2$, $-\pi < t < \pi$ mit direkter 2π-periodischer Fortsetzung.

Die Fortsetzung ist gerade, damit folgt

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^2 \cos(kt)\, dt = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3} & : \quad \text{für } k = 0 \\ (-1)^k \frac{4}{k^2} & : \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Damit bekommt man die Fourier-Reihe

$$f(t) \sim \frac{\pi^2}{3} - \frac{4\cos(t)}{1^2} + \frac{4\cos(2t)}{2^2} \mp \ldots$$

$\square$

Rechenregeln für Fourier-Reihen.

Für $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, T-periodisch mit

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} \quad \text{und} \quad g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k e^{ik\omega t}$$

gelten die folgenden Rechenregeln.

- Linearität:

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha\gamma_k + \beta\delta_k) e^{ik\omega t}$$

- Konjugation:

$$\overline{f(t)} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\gamma_{-k}} e^{ik\omega t}$$

- Zeitumkehr:

$$f(-t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{-k} e^{ik\omega t}$$

Weitere Rechenregeln für Fourier-Reihen.

- Streckung:

$$f(ct) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik(c\omega)t} \qquad \text{für } c > 0$$

- Verschiebung:

$$f(t+a) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\gamma_k e^{ik\omega a}\right) e^{ik\omega t} \qquad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

$$e^{in\omega t} f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{k-n} e^{ik\omega t} \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

Noch mehr Rechenregeln für Fourier-Reihen.

- Ableitung: Ist $f(t)$ stetig und stückweise differenzierbar, so gilt

$$
\begin{aligned}
f'(t) \quad &\sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik\omega\gamma_k)e^{ik\omega t} \\
&= \quad \sum_{k=1}^{\infty} (k\omega)\left[b_k \cos(k\omega t) - a_k \sin(k\omega t)\right]
\end{aligned}
$$

- Integration: Gilt $a_0 = \gamma_0 = \int_0^T f(t)\,dt = 0$, so folgt

$$
\int_0^t f(\tau)\,d\tau \sim -\frac{1}{T}\int_0^T \tau f(\tau)\,d\tau - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{b_k}{k\omega}\cos(k\omega t) - \frac{a_k}{k\omega}\sin(k\omega t)\right]
$$

Konvergenzsatz.

Satz: *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T*-periodisch und stückweise stetig differenzierbar. Dann gelten die folgenden Konvergenzaussagen für die zugehörige Fourier-Reihe*

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

- *Die Fourier-Reihe konvergiert punktweise und für alle* $t \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$F_f(t) = \frac{1}{2}\left[f(t^+) + f(t^-)\right] \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

- *In allen kompakten Intervallen* $[a, b]$, *in denen* $f(t)$ *stetig ist, ist die Konvergenz der Fourier-Reihe gleichmäßig.*

Bemerkung:

Die Stetigkeit von $f(t)$ reicht für die Konvergenz der Fourier-Reihe nicht aus. $\square$

Beispiel: Die Sägezahnfunktion.

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \quad \text{für } t = 0 \text{ oder } t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \quad \text{für } 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Fehlerfunktion: Definiere für $0 < t < 2\pi$

$$R_n(t) := \frac{1}{2}(t - \pi) + \sin(t) + \frac{\sin(2t)}{2} + \ldots + \frac{\sin(nt)}{n}$$

Es gilt:

$$1 + 2\cos(t) + 2\cos(2t) \ldots + 2\cos(nt) = \frac{\sin\left[(n + \frac{1}{2})t\right]}{\sin(t/2)}$$

Integration:

$$\int_{\pi}^{t} \frac{\sin\left[(n + \frac{1}{2})\tau\right]}{\sin(\tau/2)}\, d\tau = (t - \pi) + 2\sin(t) + 2\frac{\sin(2t)}{2} + \ldots + 2\frac{\sin(nt)}{n}$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
R_n(t) &= \int_\pi^t \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau\right]}{2\sin(\tau/2)}\,d\tau \\
&= \frac{-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{(2n+1)\sin(t/2)} + \frac{1}{2n+1}\int_\pi^t \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau\right)\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\sin(\tau/2)}\right)d\tau \\
&= \frac{-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{(2n+1)\sin(t/2)} + \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi\right]}{(2n+1)}\left(\frac{1}{\sin(t/2)}-1\right) \qquad \text{für } \xi\in[\pi,t],
\end{aligned}
$$

und daher

$$
|R_n(t)| \le \frac{2}{(2n+1)\sin(t/2)}
$$

Ist $t\in(0,2\pi)$ fest, so gilt:

$$
|R_n(t)| \to 0 \qquad t\to\infty
$$

$\square$

Approximation im quadratischen Mittel.

Satz: *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *eine* T*-periodische, stückweise stetige Funktion, und seien*

$$S_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right]$$

die Partialsummen der zugehörigen Fourier-Reihe von f*. Für den linearen Raum*

$$T_n := \textit{span} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega t), \ldots, \cos(n\omega t), \sin(\omega t), \ldots, \sin(n\omega t) \right\} \subset C(\mathbb{R})$$

der trigonometrischen Polynome mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \overline{u(t)} v(t)\, dt$$

gilt

$$\|f - S_n\| \leq \|f - \varphi\| \qquad \textit{für alle } \varphi \in T_n,$$

d.h. S_n *ist* `Bestapproximation` *an* f *aus* T_n *bezüglich* $\|\cdot\|$.

Beweis: Die Funktionen

$$\varphi_0(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_k(t) = \cos(k\omega t), \quad \psi_k(t) = \sin(k\omega t) \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

bilden eine Orthonormalbasis des linearen Teilraums $T_n \subset C(\mathbb{R})$.

Dann ist die Bestapproximation $s^* \in T_n$ aus T_n an $f \in C(\mathbb{R})$ gegeben durch die orthogonale Projektion von f auf T_n:

$$\begin{aligned} s^*(t) &= < f, \varphi_0 > \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{n} [< f, \varphi_k > \varphi_k(t) + < f, \psi_k > \psi_k(t)] \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{n} [a_k \varphi_k(t) + b_k \psi_k(t)] \\ &= S_n(t), \end{aligned}$$

wobei $a_0 = \sqrt{2} < f, \varphi_0 >$, $a_k =< f, \varphi_k >$ und $b_k =< f, \psi_k >$ für $k = 1, 2, \ldots, n$. ∎

Die Besselsche Ungleichung.

Satz: *Es gilt die* Besselsche Ungleichung $\|S_n\|^2 \leq \|f\|^2$, *d.h.*

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[|a_k|^2 + |b_k|^2 \right] \leq \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|f - S_n\|^2 = < f - S_n, f - S_n >= \|f\|^2 - 2\mathrm{Re} < f, S_n > + \|S_n\|^2 \\
&= \|f\|^2 - 2\mathrm{Re} < f, \frac{a_0}{\sqrt{2}} \varphi_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \varphi_k + b_k \psi_k) > + \|S_n\|^2 \\
&= \|f\|^2 - 2\mathrm{Re} \left(< f, \frac{a_0}{\sqrt{2}} \varphi_0 > + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k < f, \varphi_k > + b_k < f, \psi_k > \right] \right) + \|S_n\|^2 \\
&= \|f\|^2 - 2 \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[|a_k|^2 + |b_k|^2 \right] \right) + \|S_n\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n\|^2
\end{aligned}$$

■

Das Riemannsche Lemma.

Folgerung: *Aus der Besselschen Ungleichung folgt insbesondere die Konvergenz der beiden Reihen*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \qquad \textit{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$$

und damit gilt das `Riemannsche Lemma`

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0.$$

$\square$

Konvergenzgeschwindigkeit.

Satz: *Ist eine* T*-periodische Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(oder* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*) stückweise* $(m+1)$*-fach stetig differenzierbar, und sind die Ableitungen*

$$f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(m-1)}$$

stetig auf $\mathbb{R}$*, so gibt es eine Konstante* $C > 0$ *mit*

$$|\gamma_k| \leq \frac{C}{|k|^{m+1}} \qquad \text{für } k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Fazit: Je glatter f, desto schneller konvergiert die Fourier-Reihe F_f gegen f.

Beweis: Reicht zu zeigen für $m = 0$. Sei $f(t)$ stückweise stetig differenzierbar mit Unstetigkeitsstellen

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T.$$

Dann bekommt man mit partieller Integration

$$\begin{aligned} T \cdot \gamma_k &= \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t}\, dt \\ &= -\frac{1}{ik\omega} \sum_{j=0}^{m-1} \left[f(t) e^{-ik\omega t} \Big|_{t_j^+}^{t_{j+1}^-} - \int_{t_j}^{t_{j+1}} f'(t) e^{-ik\omega t}\, dt \right] \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} |\gamma_k| &\leq \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{k} \left[\frac{1}{\omega} \sum_{j=0}^{m-1} \left[|f(t_{j+1}^-)| + |f(t_j^+)| \right] + \frac{1}{\omega} \int_0^T |f'(t)|\, dt \right] \\ &= \frac{C}{|k|}, \qquad \text{mit } C \equiv C(f). \end{aligned}$$

■

Die Parsevalsche Gleichung.

Bemerkung. Für $n \to \infty$ geht die Besselsche Ungleichung in Gleichheit über, d.h. es gilt die Parsevalsche Gleichung $\lim_{n\to\infty} \|S_n\|^2 = \|f\|^2$, d.h.

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[|a_k|^2 + |b_k|^2\right] = \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt,$$

denn die Fourier-Reihe konvergiert im quadratischen Mittel gegen f, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\| = 0.$$

Beispiel: Für die Rechteckschwingung $R(t)$ gilt $\frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt = 2$. Da $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, gilt weiterhin

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 = \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots \right) = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = 2.$$

$\square$

Eindeutigkeitssatz.

Satz: Seien $f(t)$ und $g(t)$ zwei T-periodische stückweise stetige Funktionen mit

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(f(t^-) + f(t^+)\right) \qquad \text{für alle } t \in [0, T];$$
$$g(t) = \frac{1}{2}\left(g(t^-) + g(t^+)\right) \qquad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Weiterhin besitzen f und g dieselben Fourier-Koeffizienten, d.h. es gilt

$$\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \int_0^T g(t)\cos(k\omega t)\,dt \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0;$$
$$\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt = \int_0^T g(t)\sin(k\omega t)\,dt \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dann stimmen f und g auf ganz $\mathbb{R}$ überein, d.h. es gilt $f \equiv g$. □

13 Numerische Quadratur

Ausgangssituation: Zu berechnen sei ein bestimmtes Integral

$$I = I[f] = \int_a^b f(x)\,dx$$

mit einem *numerischen* Algorithmus.

Verwenden Numerische Quadratur (Quadraturformel) der Form

$$I[f] \approx I_n[f] = \sum_{i=0}^{n} g_i f(x_i)$$

mit

- Knoten $x_i \in [a,b]$, für $i = 0, 1, \ldots, n$;
- Gewichten g_i für $i = 0, 1, \ldots, n$.

13.1 Newton-Cotes Formeln

Grundidee: Verwende Interpolationspolynom p_n zu Daten

$$(x_i, f(x_i)) \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

und integriere die Interpolante

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \qquad \text{mit } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Ergebnis: Quadraturformel

$$I_n[f] = \int_a^b p_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} g_i f(x_i)$$

mit Gewichten

$$g_i = \int_a^b L_i(x)\,dx \qquad \text{für } 0 \leq i \leq n.$$

Konstruktion der Newton-Cotes Formeln.

Vereinfachung: Verwenden äquidistante Knoten

$$x_i = a + ih, \qquad 0 \le i \le n, \qquad \text{wobei } h = (b-a)/n.$$

Ergebnis: `Newton-Cotes-Quadraturformel`

$$I_n[f] = \int_a^b p_n(x)\,dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \alpha_{in} f(x_i)$$

mit Gewichten

$$\alpha_{in} = \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,dx = \frac{1}{n}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{s-j}{i-j}\,ds \qquad \text{für } 0 \le i \le n,$$

unter Verwendung der Substitution $s = (x-a)/h$. □

Die Trapezregel.

Wähle $n = 1$ und somit $x_0 = a$ und $x_1 = b$. Damit gilt

$$p_1(x) = \frac{x-a}{b-a} \cdot f(b) + \frac{b-x}{b-a} \cdot f(a)$$

und somit bekommt man die beiden Gewichte

$$\begin{aligned} \alpha_{01} &= \int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2} \\ \alpha_{11} &= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Trapezregel

$$I[f] \approx I_1[f] = (b-a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Die Simpsonregel.

Wähle $n = 2$ und somit

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{b+a}{2}, \quad x_2 = b.$$

Damit bekommt man die drei Gewichte

$$\begin{aligned}
\alpha_{02} &= \frac{1}{4}\int_0^2 (x-1)(x-2)\,dx = \frac{1}{6} \\
\alpha_{12} &= \frac{1}{2}\int_0^2 x(2-x)\,dx = \frac{2}{3} \\
\alpha_{22} &= \frac{1}{4}\int_0^2 x(x-1)\,dx = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Simpsonregel

$$I[f] \approx I_2[f] = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right).$$

Zwei weitere Newton-Cotes-Formeln.

- 3/8-Regel.

$$I_3[f] = \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + 2\frac{(b-a)}{3}\right) + f(b)\right)$$

- Milne-Regel.

$$\begin{aligned} I_4[f] \quad = \quad & \frac{b-a}{90}\left[7f(a) + 32f\left(a + \frac{b-a}{4}\right) + 12f\left(a + \frac{b-a}{2}\right)\right. \\ & \left. + 32f\left(a + 3\frac{(b-a)}{4}\right) + 7f(b)\right] \end{aligned}$$

Übersicht: Gewichte der Newton-Cotes Formeln.

n	α_{in}					
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				Trapezregel
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$			Simpson-Regel
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		3/8-Regel
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$	Milne-Regel

Satz:
Die Newton-Cotes-Formel $I_n[f]$ *integriert Polynome vom Grad* $\leq n$ *exakt.*

Beweis: Das Interpolationspolynom $p_n \in \mathcal{P}_n$ zu den $n+1$ Daten $(x_i, f(x_i))$, $0 \leq i \leq n$, rekonstruiert $f \in \mathcal{P}_n$ exakt, d.h. $f \equiv p_n$, und daher gilt

$$I[f] = I[p_n] = \int_a^b p_n(x)\,dx = I_n[f] \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{P}_n. \qquad \blacksquare$$

Quadraturfehler der Newton-Cotes Formeln.

$R_n[f] := I_n[f] - I[f]$ heißt Quadraturfehler der Quadraturformel $I_n(f)$.

Erinnerung: Darstellung für den Interpolationsfehler:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Beispiel: Für den Quadraturfehler der Trapezregel $(n = 1)$ gilt

$$\begin{aligned} R_1[f] &= \int_a^b (p_1(x) - f(x))\, dx = -\int_a^b \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)\, dx \\ &= -\frac{f^{(2)}(\tilde{\xi})}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)\, dx = \frac{1}{12} f^{(2)}(\tilde{\xi})(b-a)^3 \end{aligned}$$

und somit gilt für $h = b - a$ die Fehlerabschätzung

$$|R_1[f]| = |I_1[f] - I[f]| \leq \frac{1}{12} \|f^{(2)}\|_\infty \cdot h^3.$$

Quadraturfehler der Newton-Cotes Formeln.

n	$R_n[f]$	
1	$h^3 \frac{1}{12} f^{(2)}(\xi)$	Trapezregel
2	$h^5 \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi)$	Simpson-Regel
3	$h^5 \frac{3}{80} f^{(4)}(\xi)$	3/8-Regel
4	$h^7 \frac{8}{945} f^{(6)}(\xi)$	Milne-Regel

wobei jeweils

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Zusammengesetzte Newton-Cotes Formeln.

Ziel: Höhere Genauigkeit durch Unterteilung des Intervalls $[a, b]$.

Gegeben sei die äquidistante Unterteilung mit den Knoten

$$t_i = a + ih \qquad i = 0, 1, \ldots, N, \quad h = \frac{b-a}{N}.$$

Verwende auf jedem Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$ Quadraturformel der Ordnung n.

Beispiel: Zusammengesetzte Trapezregel

$$\begin{aligned} T(h) &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2}\Big(f(t_i) + f(t_{i+1})\Big) \\ &= h\left(\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \cdots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2}\right). \end{aligned}$$

$\square$

Fehlerabschätzung zusammengesetzte Trapezregel.

Satz: *Für die zusammengesetzte Trapezregel gilt die Fehlerabschätzung*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T(h) \right| \leq \frac{h^2}{12}(b-a)\|f^{(2)}\|_\infty.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\,dx - T(h) \right| &= \left| \sum_{j=0}^{N-1} \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x)\,dx - I_1^{(j)}[f] \right) \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{N-1} \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x)\,dx - I_1^{(j)}[f] \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(t_{j+1}-t_j)^3}{12} \|f^{(2)}\|_\infty \\
&\leq \frac{N}{12} h^3 \|f^{(2)}\|_\infty = \frac{h^2}{12}(b-a)\|f^{(2)}\|_\infty \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Die zusammengesetzte Simpson-Regel.

Wende die Simpson-Regel auf die Teilintervalle $[t_{2i}, t_{2i+2}]$ an, mit Knoten

$$t_{2i}, \quad t_{2i+1}, \quad t_{2i+2} \qquad \text{für } 0 \leq i \leq N/2-1,$$

wobei N gerade. Dann bekommt man die zusammengesetzte Simpson-Regel

$$\begin{aligned} S(h) &= \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{N/2-1} (f(t_{2i}) + 4f(t_{2i+1}) + f(t_{2i+2})) \\ &= \frac{h}{3} (f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots + 4f(b-h) + f(b)) \end{aligned}$$

Satz: *Für die zusammengesetzte Simpson-Regel gilt die Fehlerabschätzung*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S(h) \right| \leq \frac{h^4}{180}(b-a)\|f^{(4)}\|_\infty$$

Beweis: analog wie bei der zusammengesetzten Trapezregel. $\square$

13.2 Gauß-Quadratur

Erinnerung: Mit der Newton-Cotes Quadratur

$$I_n[f] = \sum_{i=0}^{n} g_i f(x_i) \approx I[f] = \int_a^b f(x)\,dx$$

werden Polynome vom Grad n exakt integriert.

Dabei sind die Knoten x_i, $0 \leq i \leq n$, äquidistant auf $[a, b]$ verteilt.

Grundidee der Gauß-Quadratur: Variiere die Knoten $x_0, \ldots, x_n$.

Grundidee der Gauß-Quadratur.

Ziel:

Variiere Knoten, um Polynome möglichst hohen Grades exakt zu integrieren.

Genauer:

Approximiere für eine feste positive `Gewichtsfunktion` $w : (a, b) \to (0, \infty)$ Integrale der Form

$$I[f] = \int_a^b f(x)w(x)\,dx$$

durch Quadratur der Form

$$I[f] \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i)w_i$$

mit einer speziellen Wahl von Stützstellen x_i und positiven Gewichten w_i.

Ergebnis: `Gaußsche Quadraturformeln` mit $(n + 1)$ Knoten integrieren Polynome vom Grad $2n + 1$ exakt. $\square$

Beispiel: Gauß-Tschebyscheff-Quadratur.

- **Integrationsintervall:** $I = [-1, 1]$
- **Gewichtsfunktion:** $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.
- **Knoten:** Nullstellen

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \qquad \text{für } 0 \le i \le n$$

des $(n+1)$-ten Tschebyscheff-Polynoms

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\arccos(x)) \in \mathcal{P}_{n+1} \qquad \text{für } x \in [-1, 1].$$

- **Konstante Gewichte:** $w_i \equiv \pi/(n+1)$.
- Gauß-Tschebyscheff Quadratur:

$$I_n[f] = \frac{\pi}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \approx I_w[f] = \int_{-1}^{1} f(x)w(x)\,dx.$$

Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome.

Satz: *Die Tschebyscheff-Polynome* $T_0, \ldots, T_n$ *bilden eine orthogonale Basis des Polynomraums* $\mathcal{P}_n$ *bezüglich des gewichteten Skalarprodukts*

$$(f, g)_w := \int_{-1}^{1} f(x) g(x) w(x) \, dx.$$

Genauer gilt:

$$(T_k, T_j)_w = \begin{cases} \pi & \text{für } k = j = 0 \\ \pi/2 & \text{für } k = j > 0 \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases}$$

Beweis: Übung (mit Substitution $t = \cos(x)$) $\square$

Satz: *Für die Tschebyscheff-Polynome gilt die Rekursionsformel*

$$T_{k+1}(x) = 2x T_k(x) - T_{k-1}(x) \qquad \text{für } k \geq 1,$$

wobei $T_0 \equiv 1$ *und* $T_1(x) = x$. $\square$

Legendre-Polynome.

Satz: *Für die Gewichtsfunktion* $w \equiv 1$ *auf dem Intervall* $I = [-1, 1]$ *sind die* Legendre-Polynome

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \in \mathcal{P}_n$$

Orthogonalpolynome. Genauer gilt:

$$(L_n, L_m) = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & \text{für } n = m \geq 0 \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases}$$

■

Beweis: Übung (per Induktion). □

Satz: *Für die Legendre-Polynome gilt die Rekursionsformel*

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1} \qquad \text{für } n \geq 1,$$

wobei $L_0 \equiv 1$ *und* $L_1(x) = x$. □

Weitere Eigenschaften der Legendre-Polynome.

Die ersten Legendre-Polynome sind gegeben durch

$$\begin{aligned} L_0(x) &\equiv 1 \\ L_1(x) &= x \\ L_2(x) &= (3x^2 - 1)/2 \\ L_3(x) &= (5x^3 - 3x)/2 \\ L_4(x) &= (35x^4 - 30x^2 + 3)/8 \end{aligned}$$

Deren jeweilige Nullstellen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} L_1 &: \quad x_0 = 0 \\ L_2 &: \quad x_{0/1} = \pm\sqrt{1/3} \\ L_3 &: \quad x_0 = 0, x_{1/2} = \pm\sqrt{3/5} \\ L_4 &: \quad x_{0/1/2/3} = \pm\sqrt{\frac{3}{7} \pm \frac{1}{7}\sqrt{\frac{24}{5}}} \end{aligned}$$

Zur Konstruktion der Gauß-Legendre-Quadratur.

- **Integrationsintervall:** $I = [-1, 1]$
- **Gewichtsfunktion:** $w(x) \equiv 1$.
- **Knoten:** $n + 1$ Nullstellen $x_0, \ldots, x_n$ des Legendre-Polynoms $L_{n+1} \in \mathcal{P}_{n+1}$.
- **Gewichte:** Mit festen Knoten $x_0, \ldots, x_n$ zu berechnen aus

$$w_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \, dx > 0.$$

- Gauß-Legendre Quadratur:

$$I_n[f] = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \approx I[f] = \int_{-1}^{1} f(x) \, dx.$$

Weitere Spezialfälle der Gauß-Quadratur.

Name	Intervall	Gewicht
Gauß-Legendre	$[-1, 1]$	$w \equiv 1$
Gauß-Tschebyscheff	$[-1, 1]$	$w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$
Gauß-Jacobi	$[-1, 1]$	$w(x) = (1-x)(1+x)$
Gauß-Laguerre	$[0, \infty)$	$w(x) = e^{-x}$
Gauß-Hermite	$(-\infty, \infty)$	$w(x) = e^{-x^2}$

Zur Konstruktion von Gauß-Quadraturformeln.

- Konstruiere zu festem Intervall $[a, b]$ und Gewichtsfunktion w eine Folge

$$p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}$$

von Orthogonalpolynomen, wobei $p_k \in \mathcal{P}_k$ und $(p_k, p_j)_w = \delta_{jk}$.

- Verwende Nullstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ von p_{n+1} als Knoten.
- Berechne (positive) Gewichte

$$w_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \, dx \qquad \text{für } 0 \leq i \leq n.$$

- **Ergebnis:** Gauß-Quadraturformel

$$I_n[f] = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \approx I[f] = \int_a^b f(x) w(x) \, dx$$

mit $I_n[f] = I_n[p]$ für alle $p \in \mathcal{P}_{2n+1}$.

14 Die Schnelle Fourier-Transformation

Ziel: Effiziente Berechnung der Diskreten Fourier-Transformation (DFT)

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)\omega_N^{nm} \qquad \text{für } 0 \le m \le N-1,$$

wobei

$$\omega_N := e^{-2\pi i/N}.$$

- **Methode** (Cooley & Tukey, 1965)**:**

Schnelle Fourier-Transformation, "Fast Fourier-Transformation" (FFT).

- **INPUT:** Vektor

$$z = (z(0), z(1), \ldots, z(N-1))^T \in \mathbb{C}^N$$

- **OUTPUT:** $\hat{z}$, die Diskrete Fourier-Transformation (DFT) von z:

$$\hat{z} = (\hat{z}(0), \hat{z}(1), \ldots, \hat{z}(N-1))^T \in \mathbb{C}^N$$

Grundidee der schnellen Fourier-Transformation.

Wichtige Beobachtung: Es gilt $\omega_{2N}^2 = \omega_N$.

Divide and Conquer: Für $N = 2^k$ und $0 \le m \le N-1$ gilt

$$\begin{aligned}
\hat{z}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n)\omega_N^{mn} \\
&= \sum_{n \text{ gerade}} z(n)\omega_N^{mn} + \sum_{n \text{ ungerade}} z(n)\omega_N^{mn} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} z(2n)\omega_N^{2mn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} z(2n+1)\omega_N^{(2n+1)m} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} z(2n)\omega_N^{2mn} + \omega_N^m \sum_{n=0}^{N/2-1} z(2n+1)\omega_N^{2mn}.
\end{aligned}$$

Reduktionsschritt.

Sei $M = N/2$. Dann gilt für $m = 0, 1, \ldots, N-1$

$$\begin{aligned}
\hat{z}(m) &= \sum_{n=0}^{M-1} z(2n)\omega_N^{2mn} + \omega_N^m \sum_{n=0}^{M-1} z(2n+1)\omega_N^{2mn} \\
&= \sum_{n=0}^{M-1} u(n)\omega_{N/2}^{mn} + \omega_N^m \sum_{n=0}^{M-1} v(n)\omega_{N/2}^{mn} \\
&= \sum_{n=0}^{M-1} u(n)\omega_M^{mn} + \omega_N^m \sum_{n=0}^{M-1} v(n)\omega_M^{mn},
\end{aligned}$$

wobei $u(n) := z(2n)$ und $v(n) := z(2n+1)$ für $n = 0, 1, \ldots, M-1$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{z}(m) &= \hat{u}(m) + \omega_N^m \hat{v}(m) && \text{für } m = 0, 1, \ldots, M-1. \\
\hat{z}(m) &= \hat{u}(\ell) - \omega_N^\ell \hat{v}(\ell) && \text{für } m = M, M+1, \ldots, N-1,\ m = \ell + M.
\end{aligned}$$

Komplexität der schnellen Fourier-Transformation.

Fazit: Die Diskrete Fourier-Transformation von $z \in \mathbb{C}^N$ schreibt sich als Summe zweier Diskreter Fourier-Transformationen der Länge $N/2$.

Satz: *Die schnelle Fourier-Transformation von $z \in \mathbb{C}^N$ kann für $N = 2^k$ in $\mathcal{O}(N\ \log(N))$ Schritten berechnet werden.*

Beweisskizze:

- Zerlege FFT von z der Länge N in zwei FFTs der Länge $N/2$.
- Per Induktion: Zerlege FFT der Länge $N/2^j$ in zwei FFTs der Länge $N/2^{j+1}$.
- Es gilt $N = 2^k$, d.h. $k = \log_2(N)$.
- Daher bleiben nach $j = k$ Schritten nur noch N FFTs der Länge Eins übrig.
- Nun gilt $\hat{z}(0) = z(0)$ für $z \in \mathbb{C}^1$, d.h. konstante Kosten $\mathcal{O}(1)$ für $N = 1$.
- Man bekommt $\hat{z} \in \mathbb{C}^N$ mit dieser Rekursion nach $N\ \log_2(N)$ Schritten. $\square$

Schnelle Fourier-Transformation mit Matlab.

- Berechne Fourier-Transformation $w = \hat{z} \in \mathbb{C}^N$ aus $z \in \mathbb{C}^N$ mit Matlab.

```
w = fft(z);
```

- Berechne inverse FFT (IFFT) $z \in \mathbb{C}^N$ aus $w = \hat{z} \in \mathbb{C}^N$ mit

```
z = ifft(w);
```

Grundlage der IFFT: Die Inversionsformel

$$z(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi i m n / N} \qquad \text{für } 0 \le n \le N-1.$$

$\square$