

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 2

Definition

Gegeben sei die Funktion

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

und die differenzierbare Funktion

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Man nennt man F **Stammfunktion** von f , wenn gilt

$$F' = f.$$

Ist F eine Stammfunktion von f , dann heißt

$$\int f(x) dx := F + C, \quad C \in \mathbb{R}, C = \text{const.}$$

unbestimmtes Integral von f .

Die Funktion f heißt **Integrand** und C **Integrationskonstante**.

Tabelle einiger Stammfunktionen:

$f(x)$	$F(x) = \int f(x) dx + C, \quad C \in \mathbb{R}$
a	$ax + C, \quad a \in \mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2} + C$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$-\ln \cos x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\sinh x$	$\cosh x + C$
$\cosh x$	$\sinh x + C$

Integrationsregeln

Satz: (Linearität des unbestimmten Integrals)

Für $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien Stammfunktionen bekannt.

Mit den Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx + C .$$

Satz: (partielle Integrationsregel)

Für stetig differenzierbare Funktionen $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx + C .$$

Satz: (Substitutionsregel)

Sei f stetig auf dem Intervall $[a, b]$

und g stetig differenzierbar auf dem Intervall $[c, d]$

und es existiere die Umkehrfunktion g^{-1} zu g ,

dann gilt mit der Substitution $x = g(t)$ und der

Merkregel: $\frac{dx}{dt} = g'(t) \Leftrightarrow dx = g'(t)dt$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int f(g(t))g'(t) dt &= \int f(x) dx, \quad \text{Substitution} \\ &= F(x) + C, \quad \text{Stammfunktion} \\ &= F(g(t)) + C, \quad \text{Rücksubstitution} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int f(x) dx &= \int f(g(t))g'(t) dt, \quad \text{Substitution} \\ &=: \int \tilde{f}(t) dt \\ &= \tilde{F}(t) + C, \quad \text{Stammfunktion} \\ &= \tilde{F}(g^{-1}(x)) + C, \quad \text{Rücksubstitution} \\ &=: F(x) + C \end{aligned}$$

Aufgabe 5:

Man berechne alle Stammfunktionen zu

$$\text{a) } f_1(x) = 2x^5 - 5 \sin x, \quad \text{b) } f_2(x) = 4 \cos x - 7 \sinh x$$

$$\text{c) } f_3(x) = \frac{2 + xe^x}{x}, \quad \text{d) } f_4(x) = \frac{3x^5 - 5x^3 + 4x}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{a) } \int 2x^5 - 5 \sin x \, dx$$

$$= \frac{x^6}{3} + 5 \cos x + C,$$

$$\text{b) } \int 4 \cos x - 7 \sinh x \, dx$$

$$= 4 \sin x - 7 \cosh x + C,$$

$$\text{c) } \int \frac{2 + xe^x}{x} dx$$

$$= \int \frac{2}{x} + e^x dx = 2 \ln |x| + e^x + C,$$

$$\text{d) } \int \frac{3x^5 - 5x^3 + 4x}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int 3x^{9/2} - 5x^{5/2} + 4x^{1/2} dx$$

$$= \frac{6}{11}x^{11/2} - \frac{10}{7}x^{7/2} + \frac{8}{3}x^{3/2} + C$$

Aufgabe 6:

Mit Hilfe der partiellen Integrationsregel berechne man

$$\text{a) } \int (3x - 1) \cosh x \, dx$$

partielle Integration: $u = 3x - 1$, $v' = \cosh x$

$$\begin{aligned} \int (3x - 1) \cosh x \, dx &= (3x - 1) \sinh x - \int 3 \sinh x \, dx + C \\ &= (3x - 1) \sinh x - 3 \cosh x + C \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int x \ln x \, dx$$

partielle Integration: $u' = x$, $v = \ln x$

$$\begin{aligned} \int x \ln x \, dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int x^2 \cos x \, dx$$

partielle Integration: $u = x^2$, $v' = \cos x$

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx + C$$

weitere partielle Integration: $u = 2x$, $v' = \sin x$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - \int 2 \cos x \, dx + C$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

$$d) \int \cos t \sinh t \, dt$$

partielle Integration: $u = \sinh t$, $v' = \cos t$

$$\int \cos t \sinh t \, dt = \sin t \sinh t - \int \sin t \cosh t \, dt + \tilde{C}$$

weitere partielle Integration: $u = \cosh t$, $v' = \sin t$

$$= \sin t \sinh t - (-\cos t \cosh t - \int -\cos t \sinh t \, dt) + \tilde{C}$$

$$= \sin t \sinh t + \cos t \cosh t - \int \cos t \sinh t \, dt + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow \int \cos t \sinh t \, dt = \frac{\sin t \sinh t + \cos t \cosh t}{2} + C,$$

$$\text{e) } \int 15x\sqrt{x-1} \, dx$$

partielle Integration: $u = 15x$, $v' = \sqrt{x-1}$

$$\begin{aligned} \int 15x\sqrt{x-1} \, dx &= \frac{2 \cdot 15x}{3}(x-1)^{3/2} - \int \frac{2 \cdot 15}{3}(x-1)^{3/2} \, dx + C \\ &= 10x(x-1)^{3/2} - \int 10(x-1)^{3/2} \, dx + C \\ &= 10x(x-1)^{3/2} - \frac{20}{5}(x-1)^{5/2} + C \\ &= (x-1)^{3/2}(10x - 4(x-1)) + C \\ &= 2(x-1)^{3/2}(3x+2) + C \end{aligned}$$

Aufgabe 7:

Mit Hilfe der Substitutionsregel berechne man

a) $\int \sin(x) \cos^2(x) dx$

Substitution: $u = \cos x \rightarrow du = -\sin(x) dx$

$$\begin{aligned} \int \sin(x) \cos^2(x) dx &= - \int u^2 du \\ &= -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C \end{aligned}$$

b) $\int 2x\sqrt{x^2 + 1} dx$

Substitution: $s = x^2 + 1 \rightarrow ds = 2x dx$

$$\begin{aligned} \int 2x\sqrt{x^2 + 1} dx &= \int \sqrt{s} ds \\ &= \frac{2s^{3/2}}{3} + C = \frac{2(x^2 + 1)^{3/2}}{3} + C. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int x^2 e^{x^3} dx$$

$$\text{Substitution: } t = x^3 \rightarrow dt = 3x^2 dx \rightarrow dx = \frac{dt}{3x^2}$$

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

$$\text{d) } \int \frac{(\ln(2t+3))^4}{6t+9} dt$$

$$\text{Substitution: } x = 2t + 3 \rightarrow dx = 2 dt \rightarrow dt = \frac{dx}{2}$$

$$\int \frac{(\ln(2t+3))^4}{6t+9} dt = \frac{1}{2} \int \frac{(\ln(x))^4}{3x} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{x} \cdot (\ln(x))^4 dx$$

$$\text{weitere Substitution: } u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{6} \int u^4 du = \frac{u^5}{30} + C = \frac{(\ln x)^5}{30} + C = \frac{(\ln(2t+3))^5}{30} + C$$

$$\text{e) } \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$$

$$\text{Substitution: } t = e^x \rightarrow \frac{dt}{dx} = e^x \rightarrow dx = \frac{dt}{t}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx &= \int \frac{t}{t^2 + 1} \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= \arctan t + C = \arctan e^x + C \end{aligned}$$

$$\text{f) } \int \tan x dx$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$\text{Substitution: } t = \cos x \rightarrow dt = -\sin x dx$$

$$\begin{aligned} \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= - \int \frac{1}{t} dt = -\ln |t| + C = -\ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

Aufgabe 8:

Man berechne die unbestimmten Integrale

$$\text{a) } \int x e^{5x-2} dx$$

partielle Integration: $u = x, v' = e^{5x-2}$

$$\int x e^{5x-2} dx = \frac{x e^{5x-2}}{5} - \int \frac{e^{5x-2}}{5} dx + C$$

$$= \frac{x e^{5x-2}}{5} - \frac{e^{5x-2}}{25} + C,$$

$$\text{b) } \int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx$$

partielle Integration: $u = x$ und $v' = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx &= x \cdot 2\sqrt{x+4} - 2 \int \sqrt{x+4} dx + C \\ &= 2x\sqrt{x+4} - \frac{4}{3}(x+4)^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3}(x-8)\sqrt{x+4} + C \end{aligned}$$

Alternative, Substitution:

$$u = \sqrt{x+4} \Rightarrow x = u^2 - 4, \quad dx/du = 2u \rightarrow dx = 2u du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx &= \int \frac{u^2 - 4}{u} \cdot 2u du = 2 \int u^2 - 4 du \\ &= 2 \left(\frac{u^3}{3} - 4u \right) + C \\ &= \frac{2u}{3} (u^2 - 12) + C = \frac{2}{3}(x-8)\sqrt{x+4} + C \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int \cosh^2 t \, dt$$

Additionstheorem: $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ und

partielle Integration: $u = \cosh t$, $v' = \cosh t$

$$\begin{aligned} \int \cosh^2 t \, dt &= \int \cosh t \cosh t \, dt \\ &= \cosh t \sinh t - \int \sinh t \sinh t \, dt + \tilde{C} \\ &= \cosh t \sinh t - \int \cosh^2 t - 1 \, dt + \tilde{C} \\ &= \cosh t \sinh t + \int 1 \, dt - \int \cosh^2 t \, dt + \tilde{C} \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2 \int \cosh^2 t \, dt = t + \cosh t \sinh t + \tilde{C} \quad \Rightarrow$$

$$\int \cosh^2 t \, dt = \frac{1}{2} (t + \cosh t \sinh t) + C$$

$$d) \int \sqrt{1+x^2} dx$$

Substitution:

$$x = \sinh t \Rightarrow dx = \cosh t dt \quad \text{und} \quad t = \operatorname{arsinh} x$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} dx &= \int \sqrt{1+\sinh^2 t} \cosh t dt \\ &= \int \cosh^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} (t + \cosh t \sinh t) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{arsinh} x + x\sqrt{1+x^2} \right) + C \end{aligned}$$

$$e) \int \sin^3 t \cos^3 t dt$$

Additionstheorem: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ und

Substitution: $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$

$$\begin{aligned} \int \sin^3 t \cos^3 t dt &= \int \sin^3 t \cos^2 t \cos t dt \\ &= \int \sin^3 t (1 - \sin^2 t) \cos t dt \\ &= \int x^3 (1 - x^2) dx \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + C \\ &= \frac{\sin^4 t}{4} - \frac{\sin^6 t}{6} + C \end{aligned}$$

$$\text{f) } \int \arcsin x \, dx$$

$$\int \arcsin x \, dx = \int 1 \cdot \arcsin x \, dx$$

partielle Integration:

$$u' = 1, \quad v = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin v \quad \Rightarrow$$

$$v' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin v)'} = \frac{1}{\cos v}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 v}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx + C$$

$$\text{Substitution: } u = 1 - x^2 \rightarrow du = -2x \, dx \rightarrow -\frac{du}{2} = x \, dx$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \int \frac{1}{2\sqrt{u}} \, du + C$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{u} + C$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$$