Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Dr. K. Rothe

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 6

Potenzreihen

Definition:

a) Eine Funktionenreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ heißt (komplexe) **Potenzreihe** zum **Entwicklungspunkt** $z_0 \in \mathbb{C}$.

b) Gerechtfertigt durch den nächsten Satz wird mit

$$r := \sup\{\, |z - z_0| \text{ für das } \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \text{ konvergiert } \}$$

der **Konvergenzradius** der Potenzreihe bezeichnet.
Es wird dabei $0 \leq r \leq \infty$ zugelassen.

Satz: Konvergenz von Potenzreihen

Für die Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ mit dem Konvergenzradius r gilt:

a) Für $r = 0$ konvergiert die Potenzreihe genau für $z = z_0$.

b) Gilt $0 < \rho < r$, dann konvergiert die Potenzreihe innerhalb der Kreisscheibe $|z - z_0| < r$ absolut und auf jeder Kreisscheibe $|z - z_0| \leq \rho$ absolut und gleichmäßig.

c) **Formel von Cauchy-Hadamard**

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Dabei bezeichnet $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ den größten Häufungspunkt der Folge $\sqrt[k]{|a_k|}$.

d) Für $|z - z_0| > r$ divergiert die Potenzreihe.

Satz:

Formeln zur Berechnung des Konvergenzradius

Für die Potenzreihe $\quad f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$

kann im Falle der Existenz der Grenzwerte der

Konvergenzradius folgendermaßen berechnet werden:

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \quad \text{oder} \quad r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$

$r = 0$ und $r = \infty$ sind dabei zugelassen.

Bemerkung:

Im Falle einer reellen Potenzreihe $\quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad$ wird

$]x_0 - r, x_0 + r[$ als offenes **Konvergenzintervall** bezeichnet.

Aufgabe 21:

a) Für folgende Potenzreihen bestimme man den Entwicklungspunkt und berechne den Konvergenzradius:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{7^n(n+1)} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n , \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{5}\right)^2 x\right)^{2n} .$$

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{7^n(n+1)} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{2^n}{7^n(n+1)}$$

Entwicklungspunkt: $x_0 = \dfrac{1}{2}$

Konvergenzradius:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n 7^{n+1}(n+2)}{7^n(n+1)2^{n+1}} = \frac{7}{2}$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{5}\right)^2 x\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{25}\right)^{2n} x^{2n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k ,$$

Entwicklungspunkt: $x_0 = 0$

$$\text{Koeffizienten:} \quad a_k = \begin{cases} \left(\dfrac{4}{25}\right)^k & , \quad k = 2n \\ 0 & , \quad k = 2n+1 \end{cases}$$

Konvergenzradius:

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left(\frac{4}{25}\right)^{2n}}} = \frac{25}{4}$$

b) Man bestimme den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n+1} \left(\frac{x-1}{2} \right)^n$$

und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls (mit Begründung).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n+1} \left(\frac{x-1}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{7^n}{2^n(n+1)}}_{=a_n} (x-1)^n$$

Entwicklungspunkt: $x_0 = 1$

Konvergenzradius:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{7^n 2^{n+1}(n+2)}{2^n(n+1)7^{n+1}} = \frac{2}{7}$$

Man erhält damit das offene Konvergenzintervall $\left] \frac{5}{7}, \frac{9}{7} \right[$.

Konvergenzuntersuchung in den Randpunkten:

Divergenz in $x_1 = \frac{9}{7}$, denn die harmonische Reihe entsteht:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{2^n(n+1)} \left(\frac{9}{7} - 1\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

Konvergenz in $x_2 = \frac{5}{7}$, denn
die alternierende harmonische Reihe entsteht:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{2^n(n+1)} \left(\frac{5}{7} - 1\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Konvergenz liegt also insgesamt im Intervall folgenden vor:

$$\left[\frac{5}{7}, \frac{9}{7}\right[$$

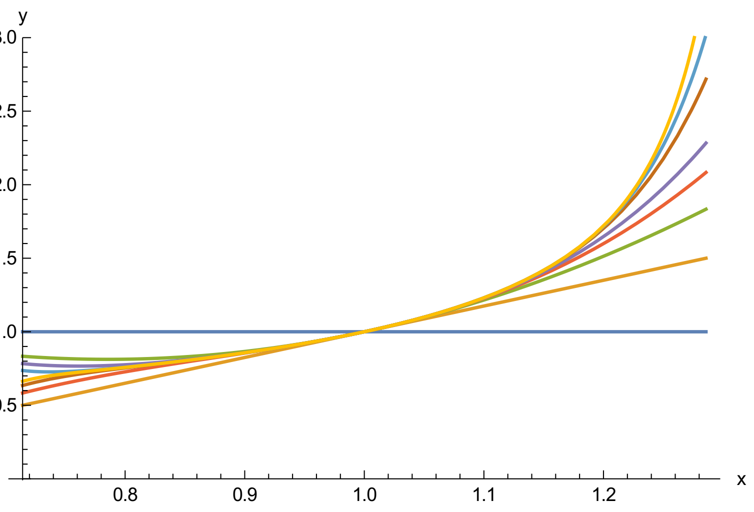

Bild 21: $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{7^n}{2^n(n+1)}(x-1)^n$ für $N = 0, 1, 2, 3, 4, 7, 10, 15$

Rechenregeln für Potenzreihen

Satz: (Identität, Summen und Produkte von Potenzreihen)

Gegeben seien zwei Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \,, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

mit $z, z_0, a_k, b_k \in \mathbb{C}$.

a) Im gemeinsamen offenen Konvergenzkreis K gelte
$f(z_k) = g(z_k)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0$ und $z_k \neq z_0$,
dann sind f und g in K identisch,
d.h. die Koeffizienten von f und g sind gleich

$$a_k = b_k \,, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

b) Im gemeinsamen Konvergenzkreis gilt

(i) $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k+b_k)(z-z_0)^k,$$

(ii) Cauchy-Produkt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k,$$

mit $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$.

c) Die Potenzreihe $\quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \quad$ besitze

den Konvergenzradius $R > 0$ und es gelte $g(0) = b_0 \neq 0$, dann besitzt die Funktion $f = 1/g$ eine Potenzreihe

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

mit einem Konvergenzradius $r > 0$.

Die Berechnung der Koeffizienten a_k erfolgt über das Cauchy-Produkt

$$1 = f(z) \cdot g(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) z^k,$$

mit Koeffizientenvergleich erhält man zunächst

$$1 = a_0 b_0 \, , \quad 0 = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 \quad \text{für} \quad k \geq 1$$

und damit dann die Rekursionsformel für a_k:

$$a_0 = \frac{1}{b_0} \, , \quad a_k = -\frac{1}{b_0} \sum_{j=0}^{k-1} a_j b_{k-j} \, , \quad k = 1, 2, \ldots$$

Aufgabe 22:

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{6}{5-4x}$ definierte Funktion.

a) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe von f

zum Entwicklungspunkt z_0 und

bestimme deren Konvergenzradius für $z_0 = \dfrac{3i}{4}$.

$$\frac{6}{5-4z} = \frac{6}{5-4z_0+4z_0-4z}$$

$$= \frac{6}{5-4z_0} \cdot \frac{1}{1-\left(\dfrac{4(z-z_0)}{5-4z_0}\right)}$$

$$= \frac{6}{5-4z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4(z-z_0)}{5-4z_0}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6 \cdot 4^k}{(5-4z_0)^{k+1}} (z-z_0)^k$$

Berechnung des Konvergenzradius:

$$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{6\cdot 4^k(5-4z_0)^{k+2}}{6\cdot 4^{k+1}(5-4z_0)^{k+1}}\right| = \left|\frac{5-4z_0}{4}\right|$$

Die Konvergenzbedingung der geometrischen Reihe wird bestätigt:

$$\left|\frac{4(z-z_0)}{5-4z_0}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |z-z_0| < \left|\frac{5-4z_0}{4}\right| = \left|\frac{5}{4} - z_0\right| = r$$

Man beachte: $x = \dfrac{5}{4}$ ist Polstelle von f.

Der Konvergenzradius für $z_0 = \dfrac{3i}{4}$:

$$r = \left|\frac{5}{4} - \frac{3i}{4}\right| = \left|\frac{5-3i}{4}\right| = \frac{\sqrt{34}}{4}.$$

b) Man bestimme die Glieder der Potenzreihenentwicklung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

über das Cauchy-Produkt von Reihen und berechne den zugehörigen Konvergenzradius.

$$\frac{6}{5-4x} \;=\; f(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \cdots \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 6 \;&=\; (5-4x)(d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \cdots) \\ &=\; 5d_0 + (5d_1 - 4d_0)x + (5d_2 - 4d_1)x^2 + (5d_3 - 4d_2)x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\Rightarrow\; 6 = 5d_0\,,\; 0 = 5d_k - 4d_{k-1} \;\Rightarrow\; d_0 = \frac{6}{5}\,,$$

$$d_k = \frac{4}{5} d_{k-1} = \cdots = \left(\frac{4}{5}\right)^k d_0 = \frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k x^k$$

Konvergenzradius: $\qquad r = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{d_k}{d_{k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{\dfrac{6}{5}\left(\dfrac{4}{5}\right)^k}{\dfrac{6}{5}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{k+1}}\right| = \dfrac{5}{4}$

Alternativrechnung mit der Rekursionsformel
(Methode identisch):

$$f(x) = \frac{6}{5-4x} = \frac{1}{\frac{5}{6} - \frac{4}{6}x} =: \frac{1}{g(x)}$$

Da $g(0) \neq 0$, besitzt f in $x_0 = 0$ eine Potenzreihenentwicklung

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$$

mit Konvergenzradius $r > 0$ und
die Koeffizienten d_k lassen sich nach der Rekursionsformel
aus dem Cauchy-Produkt berechnen:

$$a_0 d_0 = 1\,, \quad a_0 d_k = -\sum_{j=0}^{k-1} d_j a_{k-j}$$

mit

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{5}{6} - \frac{4}{6}x \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{5}{6}, a_1 = -\frac{4}{6}, a_k = 0, k \geq 2.$$

Man erhält damit $\quad d_0 = \dfrac{1}{a_0} = \dfrac{6}{5}\,,$

$$d_k = -\frac{1}{a_0} \sum_{j=0}^{k-1} d_j a_{k-j} = -\frac{a_1}{a_0} d_{k-1} = \frac{4}{5} d_{k-1} \cdots = \left(\frac{4}{5}\right)^k d_0 = \frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^k$$

Potenzreihenentwicklungen elementarer Funktionen:

a) $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$,

b) $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

c) $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$,

d) $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$,

e) $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

Satz: Differentiation einer Potenzreihe

Die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ist im Inneren des Konvergenzintervalls, also für $x_0 - r < x < x_0 + r$ mit $r > 0$ beliebig oft differenzierbar.

Die Ableitungen ergeben sich durch gliedweises differenzieren:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}, \quad f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x - x_0)^{k-2}, \dots$$

Die abgeleiteten Reihen besitzen den gleichen Konvergenzradius wie f.

Aufgabe 23:

a) Unter Verwendung der Potenzreihe von

$$f(x) = \frac{6}{5-4x}$$

berechne man die Potenzreihe von

$$g(x) = \frac{1}{(5-4x)^2}$$

zum Entwicklungspunkt x_0 und bestimme den zugehörigen Konvergenzradius.

Aus $f'(x) = \left(\dfrac{6}{5-4x}\right)' = \dfrac{24}{(5-4x)^2}$

folgt $\quad g(x) = \dfrac{1}{(5-4x)^2} = \dfrac{f'(x)}{24}$.

Damit ergibt sich die Potenzreihe von g durch differenzieren der Potenzreihe von f:

$$g(x) = \frac{1}{24}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{6 \cdot 4^k}{(5-4x_0)^{k+1}}(x-x_0)^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot 4^{k-1}}{(5-4x_0)^{k+1}}(x-x_0)^{k-1}.$$

Der Konvergenzradius stimmt mit dem von f überein.

Probe:

$$\begin{aligned} r &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k \cdot 4^{k-1}(5-4x_0)^{k+2}}{(5-4x_0)^{k+1}(k+1)4^k}\right| \\ &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k(5-4x_0)}{(k+1)4}\right| = \left|\frac{5-4x_0}{4}\right| = \left|x_0 - \frac{5}{4}\right| . \end{aligned}$$

b) Man berechne die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = y$$

mit den Anfangswerten $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$
in folgender Potenzreihendarstellung

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Im Inneren des Konvergenzintervalls darf die Potenzreihe gliedweise differenziert werden.

Setzt man die Potenzreihe und ihre zweite Ableitung in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{k+2}(k+2)(k+1) - a_k)x^k = 0\,.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich mit der Nullfunktion
ergibt sich folgende Rekursionsformel
zur Berechnung der a_k:

$$a_{k+2}(k+2)(k+1)-a_k = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{k+2} = \frac{a_k}{(k+2)(k+1)}.$$

Hier unterscheidet man

$$a_{2k+2} = \frac{a_{2k}}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{a_{2k-2}}{(2k+2)(2k+1)2k(2k-1)} = \cdots = \frac{a_0}{(2k+2)!}$$

und

$$a_{2k+1} = \frac{a_{2k-1}}{(2k+1)2k} = \frac{a_{2k-3}}{(2k+1)2k(2k-1)(2k-2)} = \cdots = \frac{a_1}{(2k+1)!}.$$

Die Anfangswerte ergeben $\quad y(0) = a_0 = 1 \Rightarrow a_{2k} = \dfrac{1}{(2k)!}$

und $\quad y'(0) = a_1 = 0 \Rightarrow a_{2k+1} = 0 \quad$ also

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$

als Lösung der Differentialgleichung.
Der Konvergenzradius in $z = x^2$ ergibt sich durch

$$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(2k+2)!}{(2k)!}\right| = \lim_{k\to\infty} (2k+2)(2k+1) = \infty.$$

Dies ist dann auch der Konvergenzradius für x.

Satz: Integration einer Potenzreihe

Die Potenzreihe $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ besitzt im Inneren des Konvergenzintervalls, also für $x_0 - r < x < x_0 + r$ mit $r > 0$ eine **Stammfunktion** F, d.h. es gilt $F' = f$.

Durch gliedweises Integrieren erhält man:

$$F(x) = C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Die Stammfunktion F besitzen den gleichen Konvergenzradius wie f.

Abelscher Grenzwertsatz:

Besitzt die reelle Potenzreihe $\quad g(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$

den endlichen Konvergenzradius $r > 0$ und

konvergiert sie im rechten Randpunkt $x_0 + r$,

so ist die Summenfunktion $g(x)$ in $x_0 + r$ (linksseitig) stetig, d.h. es gilt

$$\lim_{x \nearrow x_0 + r} g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k.$$

Entsprechendes gilt für den linken Randpunkt $x_0 - r$.

Reelle Potenzreihen sind also im ganzen Konvergenzbereich stetig.

Taylor-Polynome und Taylor-Reihe

Definition:

Gegeben sei eine in $[a,b]$ n-mal stetig differenzierbare Funktionen

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} ,$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in]a,b[$. Dann heißt

$$T_n(x;x_0) := f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Taylorpolynom n-ten Grades von f zum **Entwicklungspunkt** x_0.

Das zu $T_n(x;x_0)$ gehörige **Restglied** $R_n(x;x_0)$ bezüglich $f(x)$ wird definiert durch

$$f(x) = T_n(x;x_0) + R_n(x;x_0) .$$

Restgliedformel nach Lagrange:

Ist f sogar $n+1$-mal stetig differenzierbar, so gilt mit

$\xi := x_0 + \Theta(x-x_0)$ und $0 < \Theta < 1$ folgende Restgliedformel:

$$R_n(x;x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} .$$

Taylor-Reihe:

Falls die Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$

beliebig oft differenzierbar auf $]a, b[$ ist

und für das Restglied gilt:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x; x_0) = 0 \; ,$$

dann lässt sich f in $]a, b[$ in eine Potenzreihe entwickeln,

die dann als **Taylor-Reihe** bezeichnet wird:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \, (x - x_0)^k .$$

Aufgabe 24:

a) Für die durch $f(x) = \dfrac{2}{4+x^2}$ definierte Funktion berechne man die Potenzreihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ mit Konvergenradius unter Verwendung der geometrischen Reihe.

Mit der Summenformel der geometrischen Reihe erhält man für

$$\left|-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; |x| < 2 = r$$

$$\frac{2}{4+x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(x/2)^2} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}}x^{2k}.$$

Der Konvergenzradius $r = 2$ bestätigt sich auch rechnerisch über die Koeffizienten $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}}$ und $a_{2n+1} = 0$:

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\dfrac{1}{2^{2n+1}}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{1+1/(2n)}}} = 2.$$

b) Man berechne die Potenzreihe von $\arctan(x/2)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, bestimme den Konvergenzradius, untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten und berechne im Falle der Konvergenz den Wert der entsprechenden Reihen.

Da

$$(\arctan)'\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{4+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}} x^{2k}$$

ergibt gliedweise Integration der Reihe

$$\arctan\left(\frac{x}{2}\right) = C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)2^{2k+1}} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)2^{2k+1}} x^{2k+1},$$

denn für die Integrationskonstante gilt $C = \arctan 0 = 0$. Der Konvergenzradius $r = 2$ stimmt mit dem der abgeleiteten Reihe überein.

Setzt man die Randpunkte $x = \pm 2$ in die Potenzreihe ein, so ergeben sich die Reihen

$$\pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

die nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium konvergieren.

Konvergiert eine Potenzreihe in den Randpunkten, so ergibt sich nach dem Abelschen Grenzwertsatz dort der Wert der stetigen Fortsetzung der Summenfunktion im Inneren.

Also erhält man hier in den Randpunkten $x = \pm 2$ den Wert

$$\pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \arctan(\pm 1).$$

c) Man zeige, dass $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ gilt.

Aus b) folgt $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$

d) Man berechnet die Taylor-Reihe der durch

$$f(x) = \frac{6}{5-4x}$$

definierten Funktion zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Dazu beweise man zunächst über Induktion für $n \geq 0$

$$f^{(n)}(x) = \frac{6 \cdot 4^n \cdot n!}{(5-4x)^{n+1}} \, .$$

Induktionsbeweis für $\quad f^{(n)}(x) = \dfrac{6 \cdot 4^n \cdot n!}{(5-4x)^{n+1}}$

$n = 0$: $\quad f^{(0)}(x) = \dfrac{6 \cdot 4^0 \cdot 0!}{(5-4x)^{0+1}} = \dfrac{6}{5-4x} = f(x)$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left(\frac{6 \cdot 4^n \cdot n!}{(5-4x)^{n+1}}\right)' \\ &= \frac{6 \cdot 4^n \cdot n!(-(n+1))(-4)}{(5-4x)^{n+2}} \\ &= \frac{6 \cdot 4^{n+1} \cdot (n+1)!}{(5-4x)^{n+2}} \end{aligned}$$

Die Taylor-Reihe stimmt erwartungsgemäß mit der Potenzreihe aus Aufgabe 22 b) überein, d.h Konvergenzradius $r = 5/4$ und damit keine Konvergenz bei $x = 5/4$, da die notwendige Konvergenzbedingung verletzt ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6\cdot 4^n}{(5-4\cdot 0)^{n+1}}\,(x-0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n x^n \end{aligned}$$

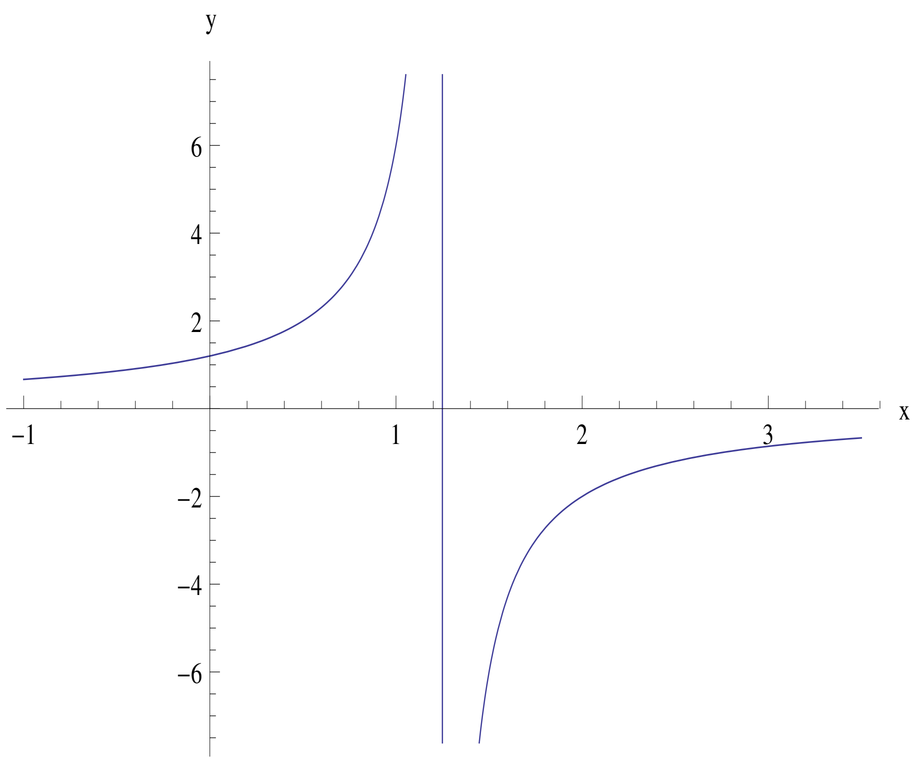

Bild 24 d) $f(x) = \dfrac{6}{5-4x}$, Polstelle bei $x = 5/4$