Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Dr. K. Rothe

Analysis II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 7

Fourier-Reihen

Definition:

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) heißt **periodisch** mit der **Periode** $T > 0$, falls

$$f(t+T) = f(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Das kleinste T heißt **Minimalperiode**.

Beispiel:

Das **trigonometrische Funktionssystem**

$$1\,,\ \sin(kt)\,,\ \cos(kt)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ besitzt die Minimalperiode $T = 2\pi$.

Bemerkungen:

a) Setzt man $t = \dfrac{T \cdot x}{2\pi} \Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot t}{T}$, so lässt sich eine T-periodische Funktion $f(t)$ in eine 2π-periodische Funktion $\tilde{f}(x)$ und umgekehrt umrechnen durch:

$$\tilde{f}(x) := f\left(\frac{T \cdot x}{2\pi}\right) \quad \text{bzw.} \quad f(t) := \tilde{f}\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right) .$$

b) Für eine T-periodische und integrierbare Funktion $g(t)$ mit $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_0^T g(t)\,dt = \int_a^{a+T} g(t)\,dt .$$

Für $a = -T/2\,,\ \omega := \dfrac{2\pi}{T}$ und $g(t) = f(t)\cos(k\omega t)$ gilt z.B.

$$\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt .$$

Definition:

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto f(t)$ heißt **stückweise stetig** bzw. **stückweise stetig differenzierbar** (oder auch **stückweise glatt**), falls f stetig bzw. stetig differenzierbar ist, bis auf endlich viele Stellen $t_i \in [a, b]$, $i = 1, \ldots, n$, an denen jedoch einseitige Grenzwerte $f(t_i + 0)$ und $f(t_i - 0)$ bzw. $f'(t_i + 0)$ und $f'(t_i - 0)$ existieren.

Definition:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) eine stückweise stetige T-periodische Funktion.

Mit $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ heißt

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

Fourier-Reihe von f. Die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t)\ dt\,, \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t)\ dt\,, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

heißen **Fourierkoeffizienten** von f in Sinus-, Kosinus Darstellung.

Konvergenzsatz:

Gegeben sei eine stückweise stetig differenzierbare und T-periodische Funktion f. Dann gilt:

a) Die Fourierreihe F_f konvergiert punktweise für alle $t \in \mathbb{R}$ mit

$$F_f(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}\,.$$

b) Ist f stetig in $[a, b]$, dann konvergiert F_f dort gleichmäßig gegen f.

Eindeutigkeitssatz:

Gegeben seien zwei stückweise stetige und T-periodische Funktionen f und g mit den gleichen Fourierkoeffizienten. Erfüllen f und g für alle $t \in \mathbb{R}$ die Mittelwerteigenschaft

$$f(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2},$$

dann sind f und g identisch.

T-Periodische Fortsetzungen:

Ist eine Funktion g nur auf dem Intervall $[0, T]$ oder $[0, T/2]$ durch $t \mapsto g(t)$ erklärt, so kann sie T-periodisch durch eine Funktion f auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Folgende Fortsetzungsmöglichkeiten werden oft verwendet:

a) **Direkte Fortsetzung**

   Gegeben $g : [0, T] \to \mathbb{R}$.

   Die direkte T-periodische Fortsetzung wird durch folgende Funktionswertzuweisung festgelegt:

$$f(t) := g(t - nT) \quad \text{für} \quad nT \leq t < (n+1)T, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

b) Gegeben $g : [0, T/2] \to \mathbb{R}$.

   (i) **Gerade Fortsetzung**
   g wird für $t \in [-T/2, 0[$ durch $g(t) := g(-t)$ zunächst zu einer geraden Funktion erweitert.

   (ii) **Ungerade Fortsetzung**
   g wird für $t \in [-T/2, 0[$ durch $g(t) := -g(-t)$ zunächst zu einer ungeraden Funktion erweitert.

   Die T-periodische Fortsetzung wird dann wie in a) durchgeführt durch

$$f(t) := g(t - nT) \quad \text{für} \quad \frac{(2n-1)T}{2} \leq t < \frac{(2n+1)T}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Satz:

Für eine stückweise stetige und T-periodische Funktion f gilt:

a) f gerade $\quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t)\, dt, \quad b_k = 0, \quad \gamma_k = \gamma_{-k},$

b) f ungerade $\quad \Rightarrow \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t)\, dt, \quad \gamma_k = -\gamma_{-k}.$

Aufgabe 25:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2) \quad , & -2 \leq x \leq 0 \quad , \\ x(2-x) \quad , & 0 \leq x \leq 2 \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion f.

b) Man berechne die Fourier-Reihe der 4-periodischen direkten Fortsetzung von f.

c) Man zeichne $S_m(x)$ und die Fehlerfunktionen $f(x) - S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$, wobei $S_m(x)$ die m-te Partialsumme der Fourier-Reihe darstellt.

d) Man zeige mit Hilfe von b) die Identität $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

Lösung:

a)

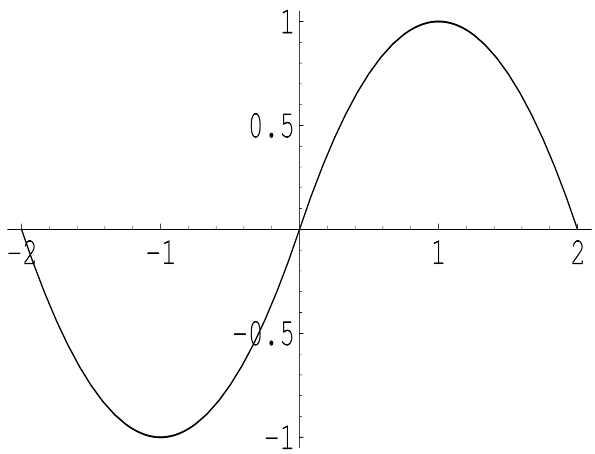

Bild 25 a) $f(x)$

b) Da f ungerade ist

$$0 \leq x \leq 2: \quad -f(x) = -x(2-x) = (-x)(2+(-x)) = f(-x),$$

gilt $a_k = 0$.

Mit den Bezeichnungen des Skriptes ist $T = 4 \Rightarrow \omega = 2\pi/T = \pi/2$

$$\begin{aligned} b_{k\geq 1} &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\, dx = \int_0^2 x(2-x)\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\, dx \\ &= -\frac{2x(2-x)}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2 + \frac{2}{k\pi}\int_0^2 2(1-x)\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{k\geq 1} &= 2(1-x)\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{2}{k\pi}\right)^2 \int\limits_0^2 2\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\,dx \\ &= -2\left(\frac{2}{k\pi}\right)^3 \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \begin{cases} 4\left(\frac{2}{k\pi}\right)^3 & k=2n-1 \\ 0 & k=2n \end{cases} \end{aligned}$$

Damit lautet die Fourier-Reihe

$$F_f(x) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) .$$

c)

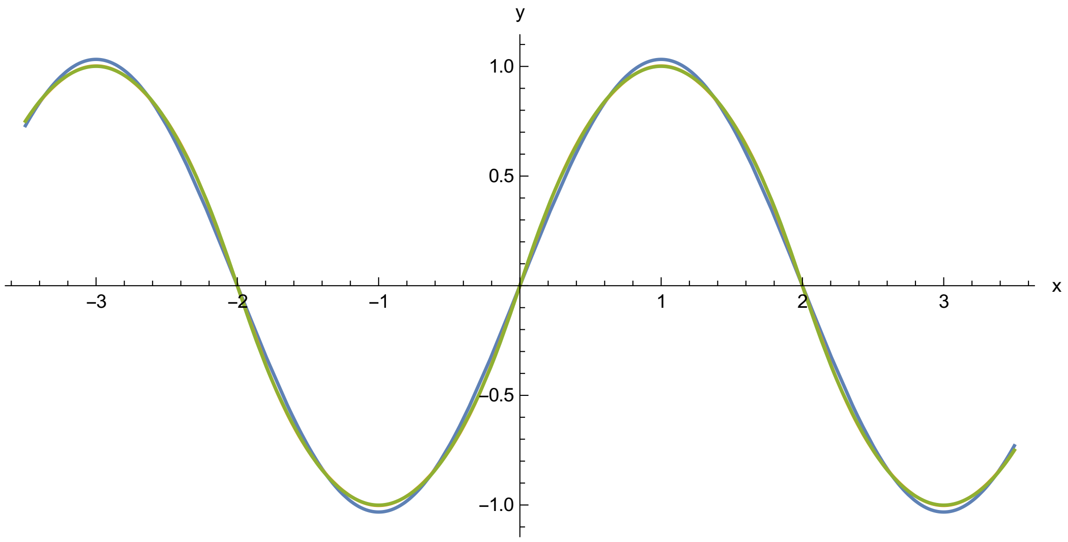

Bild 25 c) (i) $S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$

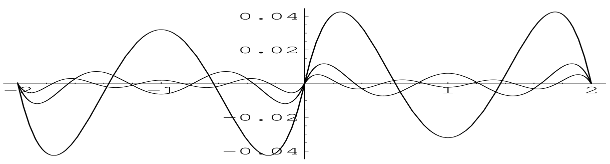

Bild 25 c) (ii) $f(x) - S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$

d) Da f stückweise C^1-Funktion und stetig in $x = 1$ ist, konvergiert die Fourier-Reihe dort gegen f. Es gilt also

$$1 = f(1) = F_f(1) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32} .$$

Aufgabe 26:

Gegeben sei die 2π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & , \quad -\pi \le x \le 0 \quad , \\ 0 & , \quad 0 \le x \le \pi \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die direkte Fortsetung im Intervall $[-\pi, 4\pi]$.

b) Man berechne die zugehörige Fourier-Reihe.

c) Man zeichne die Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_3(x)$ der berechneten Fourierreihe.

d) Mit Hilfe von b) zeige man die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \,.$$

Lösung:

a)

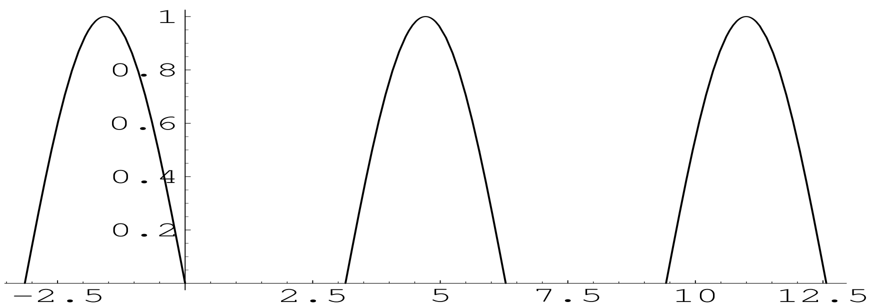

Bild 26 a) 2π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f

b) Mit den Bezeichnungen des Skriptes ist $T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = 1$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -\sin x \, dx = \frac{1}{\pi} \cos x \Big|_{-\pi}^{0} = \frac{2}{\pi}$$

$$\begin{aligned} a_{k\ge 1} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -\sin x \cos(kx)\, dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin x \sin(kx)}{k} \Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{0} \cos x \sin(kx)\, dx \right) \\ &= \frac{1}{k\pi} \left(\frac{-\cos x \cos(kx)}{k} \Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{0} \sin x \cos(kx)\, dx \right) \\ &= \frac{1}{k^2 \pi} \left(-1 - \cos(k\pi) \right) + \frac{a_k}{k^2} \end{aligned}$$

Über a_1 kann nach dieser Rechnung nichts ausgesagt werden.

$\Rightarrow$

$$a_{k\geq 2} = -\frac{1+(-1)^k}{\pi(k^2-1)} = \begin{cases} 0 & k = 2n-1 \quad \text{(ungerade)} \\ -\dfrac{2}{\pi(k-1)(k+1)} & k = 2n \quad \text{(gerade)} \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{2\pi}\left(\sin^2 x\right)\Big|_{-\pi}^{0} = 0$$

$$\begin{aligned} b_{k\geq 1} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin x \sin(kx)\,dx \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\sin x\cos(kx)}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\cos x\cos(kx)\,dx\right) \\ &= -\frac{1}{k\pi}\left(\frac{\cos x\sin(kx)}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\sin x\sin(kx)\,dx\right) = \frac{b_k}{k^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow b_{k\geq 2} = 0$, über b_1 kann nach dieser Rechnung nichts ausgesagt werden.

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin x \sin x\,dx = -\frac{1}{2\pi}\left(x - \sin x\cos x\right)\Big|_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{2}$$

Damit lautet die Fourier-Reihe

$$F_f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cos(2nx)$$

c)

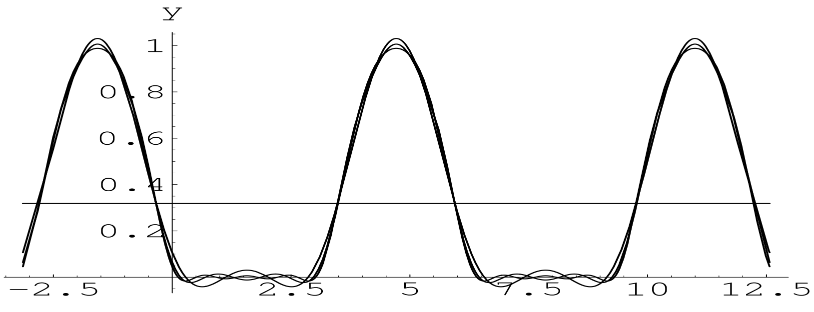

Bild 26 c): Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_3(x)$

d) Da f stückweise C^1-Funktion und stetig in $x = 0$ ist, konvergiert die Fourier-Reihe dort gegen f. Es gilt also

$$0 = f(0) = F_f(0) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}.$$

komplexe Darstellung der Fourier-Reihe von f

Mit $e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i\sin(k\omega t)$ und den Koeffizienten $\gamma_k \in \mathbb{C}$ erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} &= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{-k} e^{-ik\omega t} \\
&= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\cos(k\omega t) + i\sin(k\omega t)) + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{-k}(\cos(-k\omega t) + i\sin(-k\omega t)) \\
&= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k + \gamma_{-k})\cos(k\omega t) + (i\gamma_k - i\gamma_{-k})\sin(k\omega t) = F_f(t).
\end{aligned}$$

γ_k heißen **Fourierkoeffizienten** von f in Exponentialfunktionsdarstellung.

Es gelten folgende Umrechnungen und Beziehungen

a) (i) $a_0 = 2\gamma_0\,, \quad a_k = \gamma_k + \gamma_{-k}\,, \quad b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k})\,, \quad k \in \mathbb{N}$

(ii) $\gamma_0 = \dfrac{a_0}{2}\,, \quad \gamma_k = \dfrac{a_k - ib_k}{2}\,, \quad \gamma_{-k} = \dfrac{a_k + ib_k}{2}\,, \quad k \in \mathbb{N},$

b) $\gamma_k = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}\,dt\,, \quad k \in \mathbb{Z}.$

c) Ist f reellwertig, dann sind a_k und b_k reell und es gilt $\gamma_k = \overline{\gamma_{-k}}$.

Aufgabe 27:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad , \quad 0 \le x < \pi \, , \\ 1 \quad , \quad \pi \le x < 3\pi \end{cases}$$

a) Man zeichne die 3π-periodische Fortsetzung der Funktion f.

b) Man berechne die komplexe Fourier-Reihe der 3π-periodischen Fortsetzung von f.

c) Man gebe die reellen Fourier-Koeffizienten dieser Fourier-Reihe an.

d) Man zeichne die Partialsumme $S_{30}(x)$ der berechneten Fourier-Reihe.

Lösung:

a)

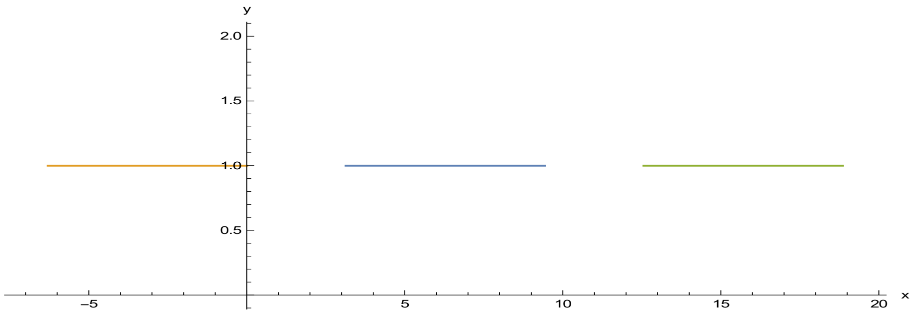

Bild 27 a): 3π-periodischen Fortsetzung von f

b) Mit den Bezeichnungen des Skriptes ist $\quad T = 3\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = \dfrac{2\pi}{3\pi} = \dfrac{2}{3}.$

$$\gamma_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \frac{1}{3\pi}\int_0^{3\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{3\pi}\int_\pi^{3\pi} 1\,dx = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$$

Für $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-ik\omega x}\,dx = \frac{1}{3\pi}\int_\pi^{3\pi} e^{-i2kx/3}\,dx = -\frac{1}{i2k\pi}e^{-i2kx/3}\Big|_\pi^{3\pi} \\
&= -\frac{1}{i2k\pi}\left(1 - e^{-i2k\pi/3}\right) = \frac{i}{2k\pi}\left(1 - e^{-i2k\pi/3}\right) \\
&= \frac{i}{2k\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right) = \gamma_k
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad F_f(x) = \gamma_0 + \sum_{\substack{k\neq 0 \\ k=-\infty}}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega x} = \frac{2}{3} + \sum_{\substack{k\neq 0 \\ k=-\infty}}^{\infty} \frac{i}{2k\pi}\left(1 - e^{-i2k\pi/3}\right)e^{i2kx/3}$$

c) $a_0 = 2\gamma_0 = \dfrac{4}{3}$

Für $k \neq 0$ gilt

$$\gamma_{-k} = -\frac{i}{2k\pi}\left(1 - e^{i2k\pi/3}\right) = -\frac{i}{2k\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right).$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} a_{k\geq 1} &= \gamma_k + \gamma_{-k} \\ &= \frac{i}{2k\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right) \\ &\quad -\frac{i}{2k\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{k\pi}\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b_{k\geq 1} &= i(\gamma_k - \gamma_{-k}) \\ &= i\left(\frac{i}{2k\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right)\right. \\ &\quad \left.+\frac{i}{2k\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

Wir bestätigen dieses Ergebnis, indem wir die reellen Koeffizienten zur Kontrolle direkt berechnen:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \frac{2}{3\pi}\int_0^{3\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{3\pi}\int_\pi^{3\pi} 1\,dx = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} a_{k\geq 1} &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\;dx = \frac{2}{3\pi}\int_\pi^{3\pi}\cos\left(\frac{2kx}{3}\right)\;dx \\ &= \frac{1}{k\pi}\sin\left(\frac{2kx}{3}\right)\Bigg|_\pi^{3\pi} = -\frac{1}{k\pi}\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) \\ b_{k\geq 1} &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(k\omega x)\;dx = \frac{2}{3\pi}\int_\pi^{3\pi}\sin\left(\frac{2kx}{3}\right)\;dx \\ &= -\frac{1}{k\pi}\cos\left(\frac{2kx}{3}\right)\Bigg|_\pi^{3\pi} = \frac{1}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

d) Mit dem Mathematica Befehl

```
Plot[2/3 +
  Sum[(-Sin[2*k*Pi/3]*Cos[2*k*x/3] + (Cos[2*k*Pi/3] - 1)*
        Sin[2*k*x/3]  )/k, {k, 1, 30}]/Pi, {x, -12, 15},
 PlotRange -> {-0.2, 1.2}, AxesLabel -> {"x", "y"}]
```

erhält man

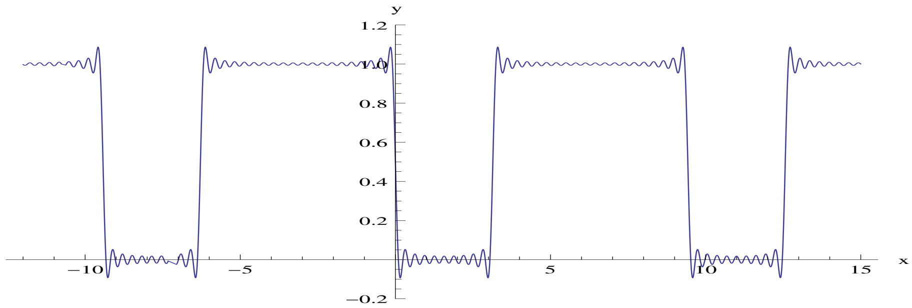

Bild 27 c): Partialsumme $S_{30}(x)$

Polynom-Interpolation

Definition:

Ein Polynom n-ten Grades

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \ ,$$

dass die **Stützstellen** (x_i, y_i) mit $i = 0, 1, \ldots, n$ **interpoliert**, d.h. es gilt

$$y_i = P_n(x_i) \ , \quad i = 0, 1, \ldots, n \ ,$$

wird als **Interpolationspolynom** bezeichnet.

Satz: Existenz und Eindeutigkeit

Zu beliebigen $n+1$ Stützstellen (x_i, y_i) mit $i = 0, 1, \ldots, n$ und paarweise verschiedenen **Knoten** x_i, d.h. es gilt $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$, gibt es genau ein Interpolationspolynom n-ten Grades P_n für das gilt

$$y_i = P_n(x_i) \ , \quad i = 0, 1, \ldots, n \ .$$

Darstellungen des Interpolationspolynoms

Lagrange-Polynome:

$$\begin{aligned} L_k(x) &:= \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \\ &= \frac{(x - x_0) \cdot \cdots \cdot (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdot \cdots \cdot (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdot \cdots \cdot (x_k - x_n)} \end{aligned}$$

Lagrange-Darstellung: $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$

Newtonsche Darstellung

Nach Newton wird das Interpolationspolynom P_n zu den Stützstellen (x_i, y_i) mit $i = 0, 1, \ldots, n$ und paarweise verschiedenen **Knoten** x_i in folgender Basisdarstellung gewählt

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \ .$$

Die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ ergeben sich aus dem

Schema der dividierten Differenzen

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
x_0 & y_0 & \boxed{=c_0} & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & & & \\
x_1 & y_1 & \to & \boxed{y_{0,1}=c_1} & & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & & & & \\
x_2 & y_2 & \to & y_{1,2} & \to & \boxed{y_{0,1,2}=c_2} & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & & \\
x_3 & y_3 & \to & y_{2,3} & \to & y_{1,2,3} & \to & \boxed{y_{0,1,2,3}=c_3} & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \\
x_n & y_n & \to & y_{n-1,n} & \to & y_{n-2,n-1,n} & \to & \cdots & \to & \boxed{y_{0,1,\ldots,n}=c_n} &
\end{array}
$$

Dabei berechnen sich die dividierten Differenzen für $0 \le j < k \le n$ durch

$$y_{j,\ldots,k} = \frac{y_{j+1,\ldots,k} - y_{j,\ldots,k-1}}{x_k - x_j}\,.$$

Damit ist eine rekursive zeilenweise Berechnung möglich:

Zeile mit x_1: $\quad y_{0,1} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Zeile mit x_2: $\quad y_{1,2} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,, \quad y_{0,1,2} = \dfrac{y_{1,2} - y_{0,1}}{x_2 - x_0}$

Zeile mit x_3: $\quad y_{2,3} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\,, \quad y_{1,2,3} = \dfrac{y_{2,3} - y_{1,2}}{x_3 - x_1}\,, \quad y_{0,1,2,3} = \dfrac{y_{1,2,3} - y_{0,1,2}}{x_3 - x_0}$

usw.

Aufgabe 28:

Von der Funktion $\sinh(x)$ sind nur die Stützstellen gegeben

x_i	0	3	6
$\sinh(x_i)$	0	10	201.7 .

a) Man gebe die Lagrange-Darstellung des Interpolationspolynoms $p_2(x)$ an.

b) Man berechne die Newtonschen Darstellung von $p_2(x)$ mit Hilfe des Schemas der dividierten Differenzen.

c) Man berechne $p_2(4)$ als Näherungswert für $\sinh(4)$ sowie den Fehler $|\sinh(4) - p_2(4)|$ und zeichne $\sinh(x)$ und $p_2(x)$ im Intervall $[0, 6.5]$.

d) Zusätzlich sei noch $\sinh(5) = 74.2$ gegeben. Mit dieser Information berechne man $p_3(x)$ und $p_3(4)$ als Näherungswert für $\sinh(4)$ sowie den Fehler $|\sinh(4) - p_3(4)|$ und zeichne $\sinh(x)$ und $p_3(x)$ im Intervall $[0, 6.5]$.

Lösung:

a) Die Lagrange-Darstellung des Polynoms lautet:

$$p_2(x) = 0 \cdot \frac{(x-3)(x-6)}{(0-3)(0-6)} + 10 \cdot \frac{(x-0)(x-6)}{(3-0)(3-6)} + 201.7 \cdot \frac{(x-0)(x-3)}{(6-0)(6-3)}$$

b) Aus dem Schema der dividierten Differenzen erhält man die Koeffizienten der Newtonschen Darstellung des Interpolationspolynoms:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & \boxed{0} & & \\ 3 & 10 & \boxed{3.3} & \\ 6 & 201.7 & 64 & \boxed{10.1} \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad p_2(x) = 3.3x + 10.1x(x-3)$$

c) $p_2(4) = 3.3 \cdot 4 + 10.1 \cdot 4 = 53.6$

$|\sinh(4) - p_2(4)| \approx |27.3 - 53.6| = 26.3$

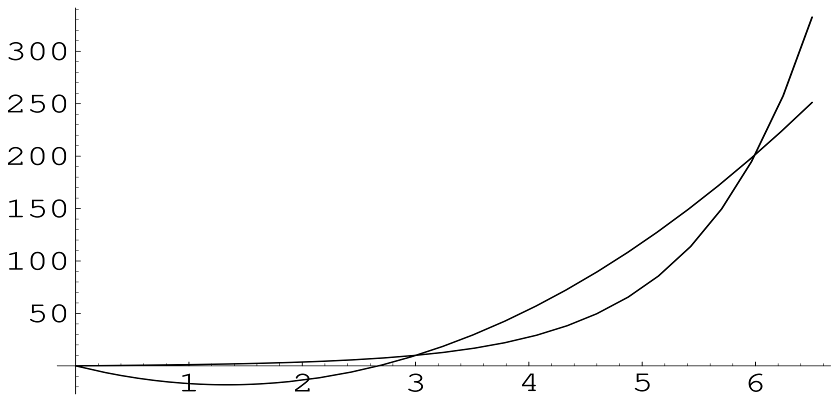

Bild 28.1 $\sinh(x)$ und $p_2(x)$

d) An das Schema der dividierten Differenzen aus a) wird für p_3 eine Zeile angehängt

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & \boxed{0} & & & \\
3 & 10 & \boxed{3.3} & & \\
6 & 201.7 & 64 & \boxed{10.1} & \\
5 & 74.2 & 127.5 & 31.7 & \boxed{4.3}
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad p_3(x) = p_2(x) + 4.3x(x-3)(x-6)$$

Die Lagrange-Darstellung von p_2 kann nicht durch Anhängen eines Summanden in p_3 überführt werden. Es ändern sich dann alle Terme.

$p_3(4) = p_2(4) + 4.3 \cdot 4(4-3)(4-6) = 19.2$

$|\sinh(4) - p_3(4)| \approx |27.3 - 19.2| = 8.1$

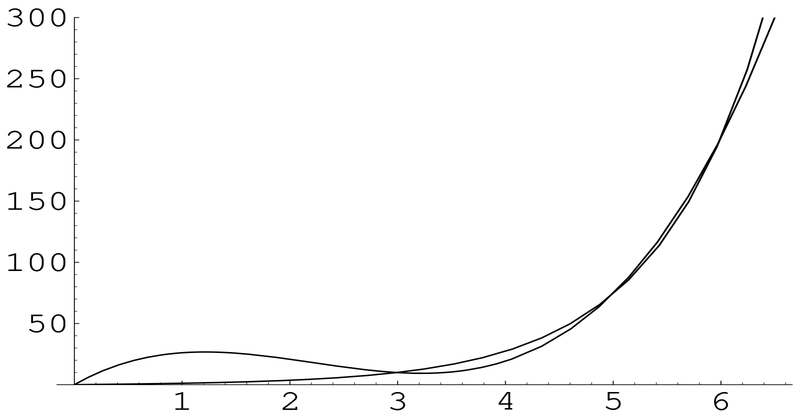

Bild 28.2 $\sinh(x)$ und $p_3(x)$