Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Dr. K. Rothe

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 7

Fourier-Reihen

Definition:

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) heißt **periodisch** mit der **Periode** $T > 0$, falls

$$f(t+T) = f(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Das kleinste T heißt **Minimalperiode**.

Beispiel:

Das **trigonometrische Funktionssystem**

$$1\ ,\ \sin(kt)\ ,\ \cos(kt)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ besitzt die Minimalperiode $T = 2\pi$.

Bemerkungen:

a) Setzt man $t = \dfrac{T \cdot x}{2\pi} \Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot t}{T}$,
so lässt sich eine T-periodische Funktion $f(t)$ in eine 2π-periodische Funktion $\tilde{f}(x)$ und umrechnen oder umgekehrt durch:

$$\tilde{f}(x) := f\left(\frac{T \cdot x}{2\pi}\right) \quad \text{bzw.} \quad f(t) := \tilde{f}\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right) .$$

b) Für eine T-periodische und integrierbare Funktion $g(t)$ mit $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_0^T g(t)\,dt = \int_a^{a+T} g(t)\,dt\,.$$

Für $a = -T/2$, $\omega := \dfrac{2\pi}{T}$ und $g(t) = f(t)\cos(k\omega t)$ gilt z.B.

$$\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt\,.$$

Definition:

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto f(t)$

heißt **stückweise stetig** bzw.

stückweise stetig differenzierbar
(oder auch **stückweise glatt**),

falls f stetig bzw. stetig differenzierbar ist,

bis auf endlich viele Stellen $t_i \in [a,b]$, $i = 1,\ldots,n$,

an denen jedoch einseitige Grenzwerte $f(t_i+0)$ und $f(t_i-0)$ bzw. $f'(t_i+0)$ und $f'(t_i-0)$ existieren.

Definition:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) eine stückweise stetige und T-periodische Funktion.

Mit $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ heißt

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right]$$

Fourier-Reihe von f.

Die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t)\ dt\,, \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t)\ dt\,, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

heißen **Fourierkoeffizienten** von f

in Sinus-, Kosinus Darstellung.

Konvergenzsatz:

Gegeben sei eine stückweise stetig differenzierbare und T-periodische Funktion f. Dann gilt:

a) Die Fourierreihe F_f konvergiert punktweise für alle $t \in \mathbb{R}$ mit
$$F_f(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} \, .$$

b) Ist f stetig in $[a, b]$, dann konvergiert F_f dort gleichmäßig gegen f.

Eindeutigkeitssatz:

Gegeben seien zwei stückweise stetige und T-periodische Funktionen f und g mit den gleichen Fourierkoeffizienten.

Erfüllen f und g für alle $t \in \mathbb{R}$ die Mittelwerteigenschaft

$$f(t) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} \, ,$$

dann sind f und g identisch.

T-Periodische Fortsetzungen:

Ist eine Funktion g nur auf dem Intervall $[0, T]$ oder $[0, T/2]$ durch $t \mapsto g(t)$ erklärt, so kann sie T-periodisch durch eine Funktion f auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden.

Folgende Fortsetzungsmöglichkeiten werden oft verwendet:

a) **Direkte Fortsetzung**

Gegeben $g : [0, T] \to \mathbb{R}$.

Die direkte T-periodische Fortsetzung wird durch folgende Funktionswertzuweisung festgelegt:

$$f(t) := g(t - nT) \quad \text{für} \quad nT \le t < (n+1)T\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

b) Gegeben $g : [0, T/2] \to \mathbb{R}$.

(i) **Gerade Fortsetzung**

g wird für $t \in [-T/2, 0[$ durch $g(t) := g(-t)$ zunächst zu einer geraden Funktion erweitert.

(ii) **Ungerade Fortsetzung**

g wird für $t \in [-T/2, 0[$ durch $g(t) := -g(-t)$ zunächst zu einer ungeraden Funktion erweitert.

Die T-periodische Fortsetzung

wird dann wie in a) durchgeführt durch

$$f(t) := g(t - nT) \quad \text{für} \quad \frac{(2n-1)T}{2} \le t < \frac{(2n+1)T}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Satz:

Für eine stückweise stetige und T-periodische Funktion f gilt:

a) f gerade

$$\Rightarrow \quad a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t)\ dt, \quad b_k = 0,$$

b) f ungerade

$$\Rightarrow a_k = 0, \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t)\ dt,$$

Aufgabe 25:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2) \ , & -2 \le x \le 0 \ , \\ x(2-x) \ , & 0 \le x \le 2 \ . \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion f

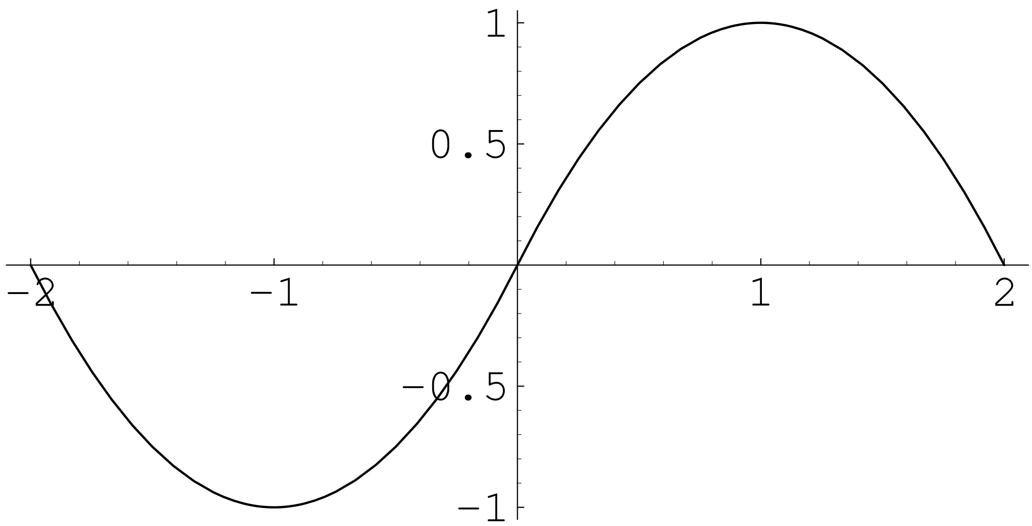

Bild 25 a) $f(x)$

b) Man berechne die Fourier-Reihe der 4-periodischen direkten Fortsetzung von f.

Da f ungerade ist

$0 \leq x \leq 2: \quad -f(x) = -x(2-x) = (-x)(2+(-x)) = f(-x),$

gilt $a_k = 0$.

Mit den Bezeichnungen des Skriptes ist

$T = 4 \;\Rightarrow\; \omega = 2\pi/T = \pi/2$

$$\begin{aligned}
b_{k\geq 1} &= \frac{4}{T}\int\limits_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\,dx \;=\; \int\limits_0^{2} x(2-x)\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= -\frac{2x(2-x)}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2 + \frac{2}{k\pi}\int\limits_0^{2} 2(1-x)\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{k\geq 1} &= 2(1-x)\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\int\limits_0^{2} 2\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= -2\left(\frac{2}{k\pi}\right)^3\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \begin{cases} 4\left(\dfrac{2}{k\pi}\right)^3 & k = 2n-1 \\[2ex] 0 & k = 2n \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit lautet die Fourier-Reihe

$$F_f(x) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) .$$

c) Man zeichne $S_m(x)$ und die Fehlerfunktionen $f(x) - S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$, wobei $S_m(x)$ die m-te Partialsumme der Fourier-Reihe darstellt.

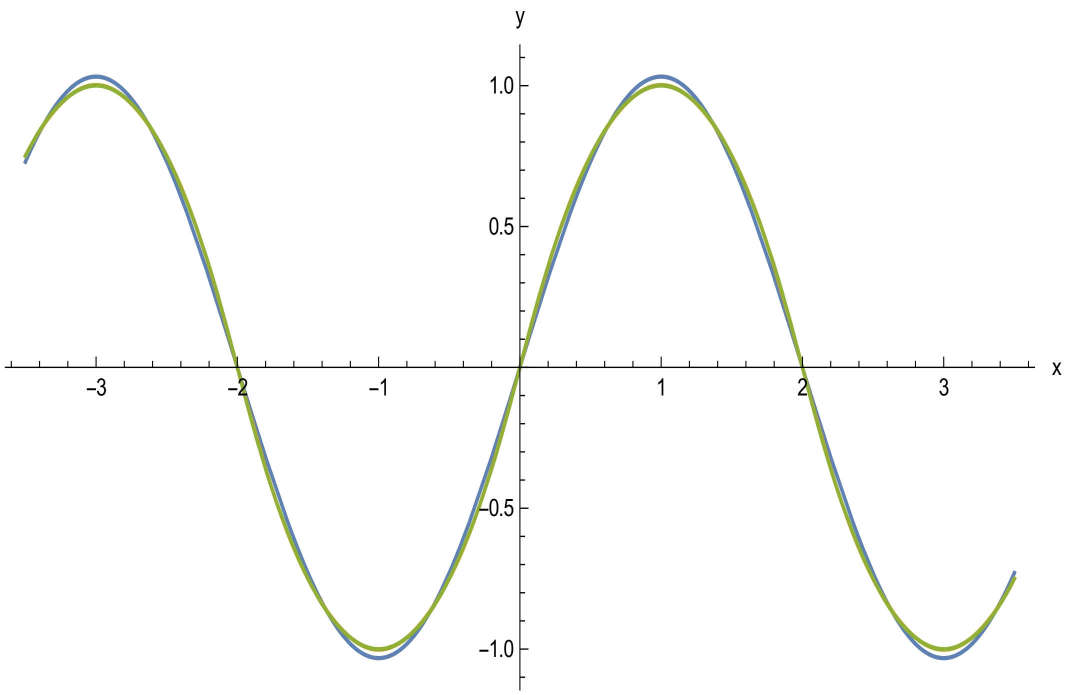

Bild 25 c) (i) $S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$

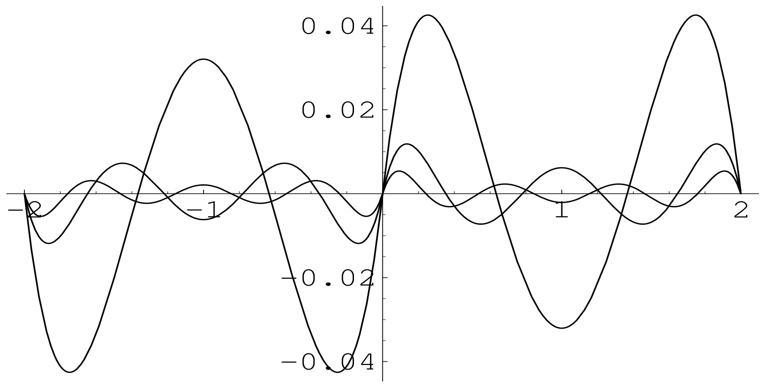

Bild 25 c) (ii) $f(x) - S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$

d) Man zeige mit Hilfe von b) die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32} .$$

Da f stückweise C^1-Funktion und stetig in $x = 1$ ist, konvergiert die Fourier-Reihe dort gegen f.

Es gilt also

$$1 = f(1) = F_f(1) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32} .$$

Aufgabe 26:

Gegeben sei die 2π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x \ , & -\pi \leq x \leq 0 \ , \\ 0 \ , & 0 \leq x \leq \pi \ . \end{cases}$$

a) Man zeichne die direkte Fortsetung im Intervall $[-\pi, 4\pi]$.

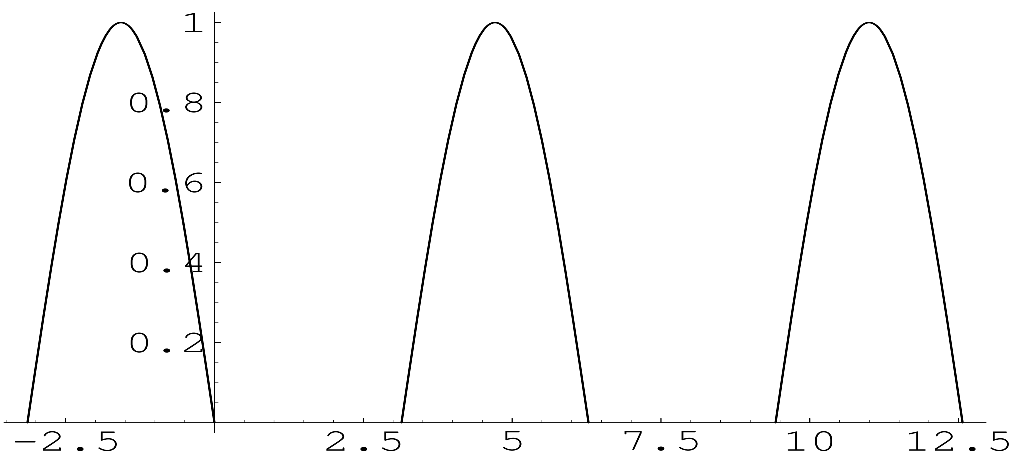

Bild 26 a) 2π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f

b) Man berechne die zugehörige Fourier-Reihe.

Mit den Bezeichnungen des Skriptes ist

$$T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = 1.$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -\sin x\, dx = \frac{1}{\pi} \cos x \Big|_{-\pi}^{0} = \frac{2}{\pi}$$

$$\begin{aligned}
a_{k\geq 1} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -\sin x \cos(kx)\, dx \\
&= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin x \sin(kx)}{k} \Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{0} \cos x \sin(kx)\, dx \right) \\
&= \frac{1}{k\pi} \left(\frac{-\cos x \cos(kx)}{k} \Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{0} \sin x \cos(kx)\, dx \right) \\
&= \frac{1}{k^2\pi} (-1 - \cos(k\pi)) + \frac{a_k}{k^2}
\end{aligned}$$

Über a_1 kann nach dieser Rechnung nichts ausgesagt werden.

$$a_{k\geq 2} \;=\; -\frac{1+(-1)^k}{\pi(k^2-1)} = \begin{cases} 0 & k = 2n-1 \quad \text{(ungerade)} \\[2ex] -\dfrac{2}{\pi(k-1)(k+1)} & k = 2n \qquad \text{(gerade)} \end{cases}$$

$$a_1 \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin x\cos x\,dx \;=\; -\frac{1}{2\pi}\left(\sin^2 x\right)\Big|_{-\pi}^{0} \;=\; 0$$

$$\begin{aligned} b_{k\geq 1} \;&=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin x\sin(kx)\,dx \\ &=\; -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\sin x\cos(kx)}{k}\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\cos x\cos(kx)\,dx\right) \\ &=\; -\frac{1}{k\pi}\left(\frac{\cos x\sin(kx)}{k}\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\sin x\sin(kx)\,dx\right) \;=\; \frac{b_k}{k^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow b_{k\geq 2} = 0$, über b_1 kann nach dieser Rechnung nichts ausgesagt werden.

$$b_1 \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin x\sin x\,dx \;=\; -\frac{1}{2\pi}\left(x-\sin x\cos x\right)\Big|_{-\pi}^{0} \;=\; -\frac{1}{2}$$

Damit lautet die Fourier-Reihe

$$F_f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cos(2nx)$$

c) Man zeichne die Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_3(x)$ der berechneten Fourierreihe.

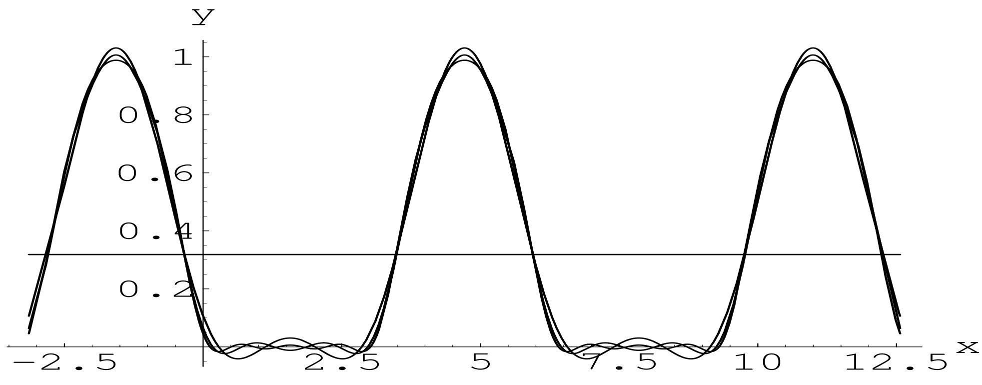

Bild 26 c): Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_3(x)$

d) Mit Hilfe von b) zeige man die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\,.$$

Da f stückweise C^1-Funktion und stetig in $x = 0$ ist, konvergiert die Fourier-Reihe dort gegen f.

Es gilt also

$$0 = f(0) = F_f(0) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\,.$$

komplexe Darstellung der Fourier-Reihe von f

Mit $e^{ik\omega t} = \cos(k\omega t) + i\sin(k\omega t)$ und den Koeffizienten $\gamma_k \in \mathbb{C}$ erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} &= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{-k} e^{-ik\omega t} \\
&= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (\cos(k\omega t) + i\sin(k\omega t)) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{-k} (\cos(-k\omega t) + i\sin(-k\omega t)) \\
&= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k + \gamma_{-k}) \cos(k\omega t) + (i\gamma_k - i\gamma_{-k}) \sin(k\omega t) \\
&= F_f(t)
\end{aligned}$$

γ_k heißen **Fourierkoeffizienten** von f

in Exponentialfunktionsdarstellung.

Es gelten folgende Umrechnungen und Beziehungen

a) (i) $a_0 = 2\gamma_0, \quad a_k = \gamma_k + \gamma_{-k}, \quad b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k}), \quad k \in \mathbb{N}$

(ii) $\gamma_0 = \dfrac{a_0}{2}, \quad \gamma_k = \dfrac{a_k - ib_k}{2}, \quad \gamma_{-k} = \dfrac{a_k + ib_k}{2}, \quad k \in \mathbb{N},$

b) $\gamma_k = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T f(t) e^{-ik\omega t}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$

c) Ist f reellwertig, dann sind a_k und b_k reell und es gilt $\gamma_k = \overline{\gamma_{-k}}$.

Aufgabe 27:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ , \ 0 \leq x < \pi \ , \\ 1 \ , \ \pi \leq x < 3\pi \end{cases}$$

a) Man zeichne die 3π-periodische Fortsetzung der Funktion f.

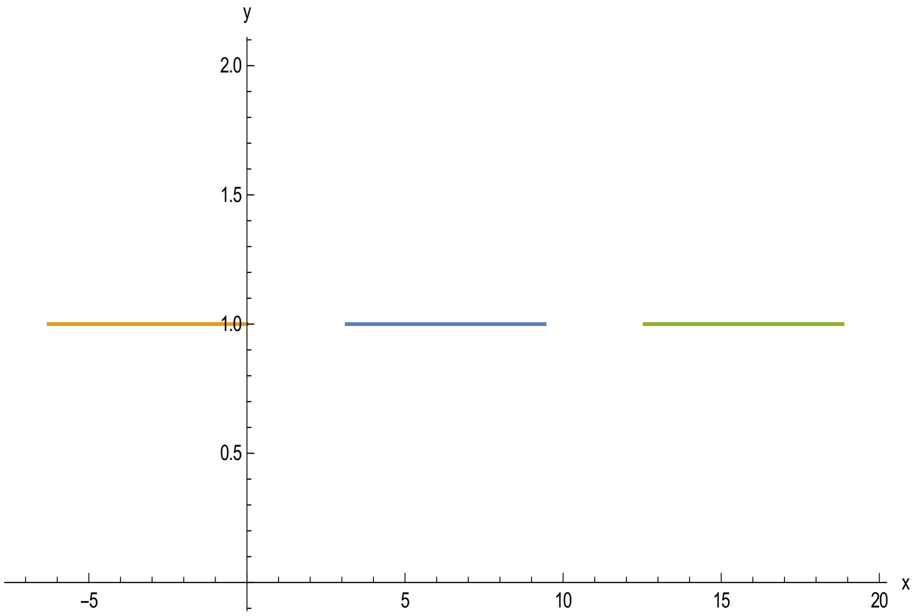

Bild 27 a): 3π-periodischen Fortsetzung von f

b) Man berechne die komplexe Fourier-Reihe der 3π-periodischen Fortsetzung von f.

Mit den Bezeichnungen des Skriptes ist

$$T = 3\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}.$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx = \frac{1}{3\pi}\int_0^{3\pi} f(x)dx = \frac{1}{3\pi}\int_\pi^{3\pi} 1dx = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$$

Für $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-ik\omega x}\,dx \\
&= \frac{1}{3\pi}\int_\pi^{3\pi} e^{-i2kx/3}\,dx = -\frac{1}{i2k\pi}e^{-i2kx/3}\Big|_\pi^{3\pi} \\
&= -\frac{1}{i2k\pi}\left(1 - e^{-i2k\pi/3}\right) = \frac{i}{2k\pi}\left(1 - e^{-i2k\pi/3}\right) \\
&= \frac{i}{2k\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right) = \gamma_k
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad F_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{i2kx/3}$$

c) Man gebe die reellen Fourier-Koeffizienten dieser Fourier-Reihe an.

$$a_0 = 2\gamma_0 = \frac{4}{3}$$

Für $k \neq 0$ gilt

$$\gamma_{-k} = -\frac{i}{2k\pi}\left(1 - e^{i2k\pi/3}\right) = -\frac{i}{2k\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right) .$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
a_{k\geq 1} &= \gamma_k + \gamma_{-k} \\
&= \frac{i}{2k\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right) \\
&\quad -\frac{i}{2k\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{k\pi}\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{k\geq 1} &= i(\gamma_k - \gamma_{-k}) \\
&= i\left(\frac{i}{2k\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right)\right. \\
&\quad \left. +\frac{i}{2k\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) - 1\right)
\end{aligned}$$

Wir bestätigen dieses Ergebnis, indem wir die reellen Koeffizienten zur Kontrolle direkt berechnen:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_0^T f(x)\,dx = \frac{2}{3\pi} \int\limits_0^{3\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{3\pi} \int\limits_\pi^{3\pi} 1\,dx = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} a_{k\geq 1} &= \frac{2}{T} \int\limits_0^T f(x)\cos(k\omega x)\ dx \ = \ \frac{2}{3\pi} \int\limits_\pi^{3\pi} \cos\left(\frac{2kx}{3}\right)\ dx \\ &= \frac{1}{k\pi}\sin\left(\frac{2kx}{3}\right)\Bigg|_\pi^{3\pi} \ = \ -\frac{1}{k\pi}\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{k\geq 1} &= \frac{2}{T} \int\limits_0^T f(x)\sin(k\omega x)\ dx \ = \ \frac{2}{3\pi} \int\limits_\pi^{3\pi} \sin\left(\frac{2kx}{3}\right)\ dx \\ &= -\frac{1}{k\pi}\cos\left(\frac{2kx}{3}\right)\Bigg|_\pi^{3\pi} \ = \ \frac{1}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

d) Man zeichne die Partialsumme $S_{30}(x)$ der berechneten Fourier-Reihe.

Mit dem Mathematica Befehl

```
Plot[2/3 + Sum[(-Sin[2*k*Pi/3]*Cos[2*k*x/3]
      + (Cos[2*k*Pi/3] - 1)* Sin[2*k*x/3]  )/k,
      {k, 1, 30}]/Pi, {x, -12, 15},
PlotRange -> {-0.2, 1.2}, AxesLabel -> {"x", "y"}]
```

erhält man

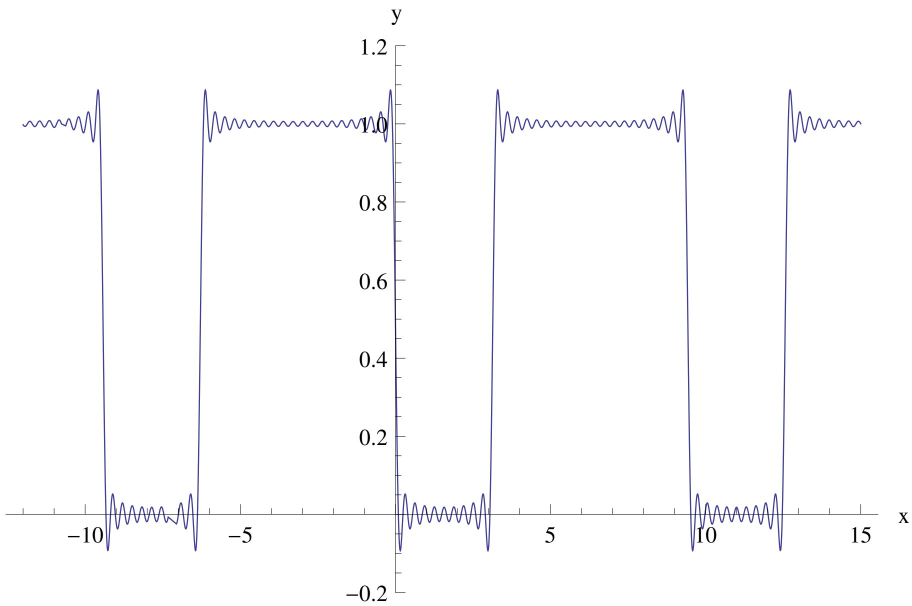

Bild 27 c): Partialsumme $S_{30}(x)$

Polynom-Interpolation

Definition:

Ein Polynom n-ten Grades

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \ ,$$

dass die **Stützstellen** (x_i, y_i) mit $i = 0, 1, \ldots, n$

interpoliert, d.h. es gilt

$$y_i = P_n(x_i) \ , \quad i = 0, 1, \ldots, n \ ,$$

wird als **Interpolationspolynom** bezeichnet.

Satz: Existenz und Eindeutigkeit

Zu beliebigen $n+1$ Stützstellen (x_i, y_i) mit $i = 0, 1, \ldots, n$

und paarweise verschiedenen **Knoten** x_i,

d.h. es gilt $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$,

gibt es genau ein Interpolationspolynom

n-ten Grades P_n für das gilt

$$y_i = P_n(x_i) \ , \quad i = 0, 1, \ldots, n \ .$$

Darstellungen des Interpolationspolynoms

Lagrange-Polynome:

$$
\begin{aligned}
L_k(x) &:= \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \\
&= \frac{(x-x_0)\cdot\dots\cdot(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdot\dots\cdot(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdot\dots\cdot(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdot\dots\cdot(x_k-x_n)}
\end{aligned}
$$

Lagrange-Darstellung: $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$

Newtonsche Darstellung

Nach Newton wird das Interpolationspolynom P_n zu den Stützstellen (x_i, y_i) mit $i = 0, 1, \dots, n$ und paarweise verschiedenen **Knoten** x_i in folgender Basisdarstellung gewählt

$$
\begin{aligned}
P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots \\
+ c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\,.
\end{aligned}
$$

Die Koeffizienten $c_0, c_1, \dots, c_n$ ergeben sich aus dem

Schema der dividierten Differenzen

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
x_0 & y_0 & \boxed{=c_0} & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & & & \\
x_1 & y_1 & \rightarrow & \boxed{y_{0,1}=c_1} & & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & & & & \\
x_2 & y_2 & \rightarrow & y_{1,2} & \rightarrow & \boxed{y_{0,1,2}=c_2} & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & & \\
x_3 & y_3 & \rightarrow & y_{2,3} & \rightarrow & y_{1,2,3} & \rightarrow & \boxed{y_{0,1,2,3}=c_3} & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \searrow & \\
x_n & y_n & \rightarrow & y_{n-1,n} & \rightarrow & y_{n-2,n-1,n} & \rightarrow & \cdots & & \rightarrow & \boxed{y_{0,1,\ldots,n}=c_n}
\end{array}
$$

Dabei berechnen sich die dividierten Differenzen für $0 \le j < k \le n$ durch

$$y_{j,\ldots,k} = \frac{y_{j+1,\ldots,k} - y_{j,\ldots,k-1}}{x_k - x_j} \,.$$

Damit ist eine rekursive zeilenweise Berechnung möglich:

Zeile mit x_1: $\quad y_{0,1} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Zeile mit x_2: $\quad y_{1,2} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,, \quad y_{0,1,2} = \dfrac{y_{1,2} - y_{0,1}}{x_2 - x_0}$

Zeile mit x_3:

$$y_{2,3} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\,, \quad y_{1,2,3} = \frac{y_{2,3} - y_{1,2}}{x_3 - x_1}\,, \quad y_{0,1,2,3} = \frac{y_{1,2,3} - y_{0,1,2}}{x_3 - x_0}$$

usw.

Aufgabe 28:

Von der Funktion $\sinh(x)$ sind nur die Stützstellen gegeben

x_i	0	3	6
$\sinh(x_i)$	0	10	201.7 .

a) Man gebe die Lagrange-Darstellung des Interpolationspolynoms $p_2(x)$ an.

$$p_2(x) = 0\cdot\frac{(x-3)(x-6)}{(0-3)(0-6)} + 10\cdot\frac{(x-0)(x-6)}{(3-0)(3-6)} + 201.7\cdot\frac{(x-0)(x-3)}{(6-0)(6-3)}$$

b) Man berechne die Newtonschen Darstellung von $p_2(x)$ mit Hilfe des Schemas der dividierten Differenzen.

Das Schema der dividierten Differenzen ergibt die Koeffizienten der Newtonschen Darstellung c_i

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & \boxed{0} & & \\ 3 & 10 & \boxed{3.3} & \\ 6 & 201.7 & 64 & \boxed{10.1} \end{array} \quad \Rightarrow \quad p_2(x) = 3.3x + 10.1x(x-3)$$

c) Man berechne $p_2(4)$ als Näherungswert für $\sinh(4)$
sowie den Fehler $|\sinh(4) - p_2(4)|$ und
zeichne $\sinh(x)$ und $p_2(x)$ im Intervall $[0, 6.5]$.

$$p_2(4) = 3.3 \cdot 4 + 10.1 \cdot 4 = 53.6$$

$$|\sinh(4) - p_2(4)| \approx |27.3 - 53.6| = 26.3$$

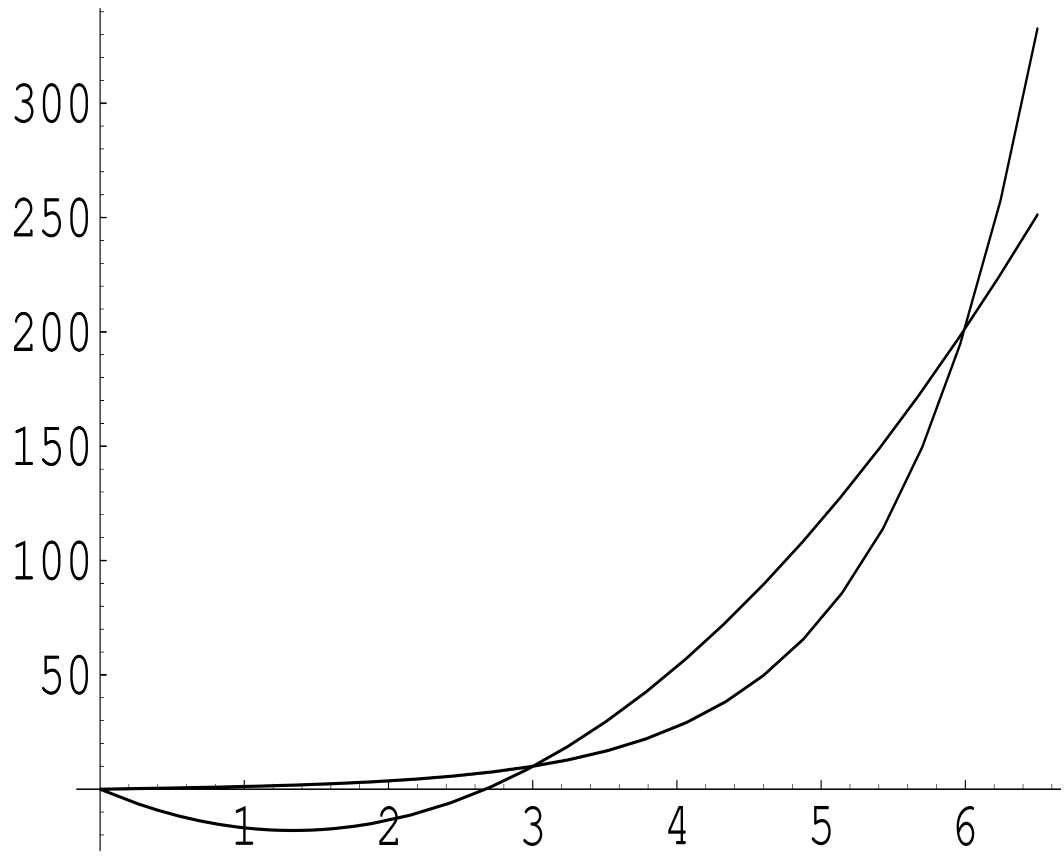

Bild 28.1 $\sinh(x)$ und $p_2(x)$

d) Zusätzlich sei noch $\sinh(5) = 74.2$ gegeben.
Mit dieser Information berechne man $p_3(x)$
und $p_3(4)$ als Näherungswert für $\sinh(4)$
sowie den Fehler $|\sinh(4) - p_3(4)|$ und
zeichne $\sinh(x)$ und $p_3(x)$ im Intervall $[0, 6.5]$.

An das Schema der dividierten Differenzen aus a) wird für p_3 eine Zeile angehängt

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & \boxed{0} & & & \\
3 & 10 & \boxed{3.3} & & \\
6 & 201.7 & 64 & \boxed{10.1} & \\
5 & 74.2 & 127.5 & 31.7 & \boxed{4.3}
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad p_3(x) = p_2(x) + 4.3x(x-3)(x-6)$$

Die Lagrange-Darstellung von p_2
kann nicht durch Anhängen eines Summanden
in p_3 überführt werden.

$$p_3(4) = p_2(4) + 4.3 \cdot 4(4-3)(4-6) = 19.2$$

$$|\sinh(4) - p_3(4)| \approx |27.3 - 19.2| = 8.1$$

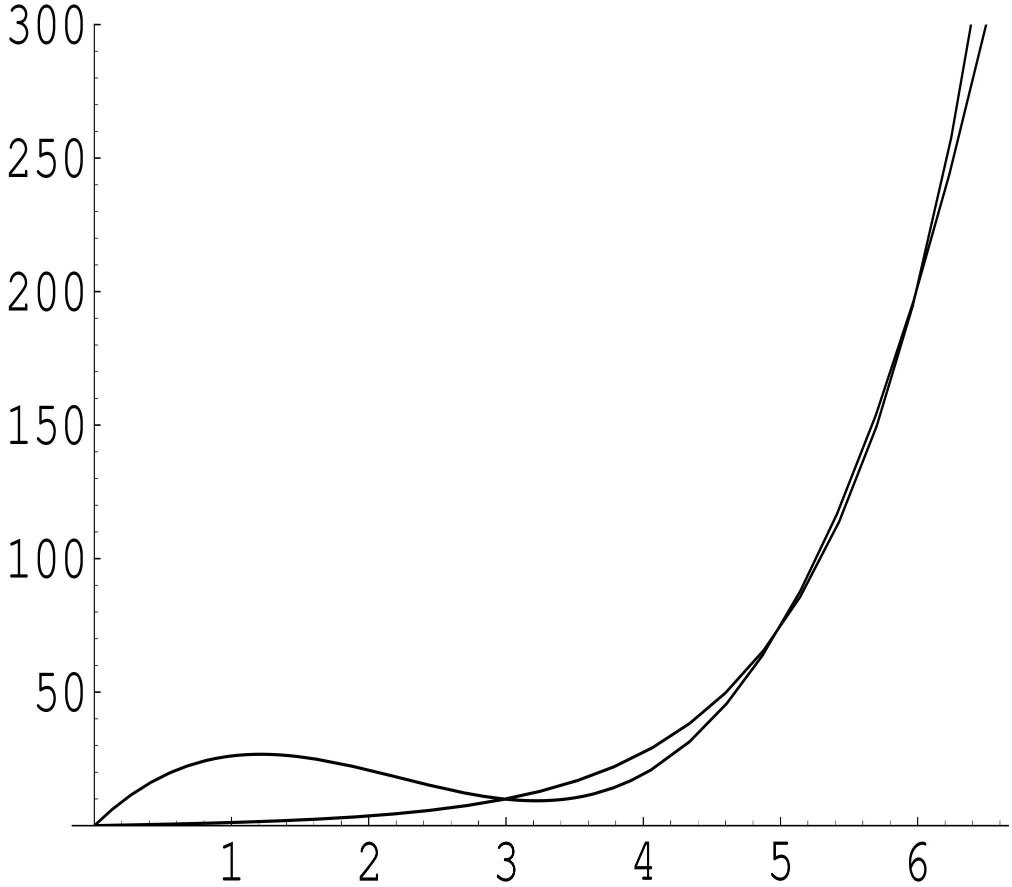

Bild 28.2 $\sinh(x)$ und $p_3(x)$