Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 1

Aufgabe 1:

Gegeben sei eine Kugel vom Radius R. Wie groß ist das maximale Volumen eines der Kugel einbeschriebenen Zylinders?

Lösung:

R Kugelradius, r Zylinderradius, h Zylinderhöhe

Zylindervolumen: $V_{Zyl}(r,h) = \pi r^2 h$ mit $r, h \geq 0$

Der Zylinder wird der Kugel so einbeschrieben, dass er die Kugeloberfläche von innen berührt, jeweils mit den Rändern der ihn begrenzenden kreisförmigen Deckel.

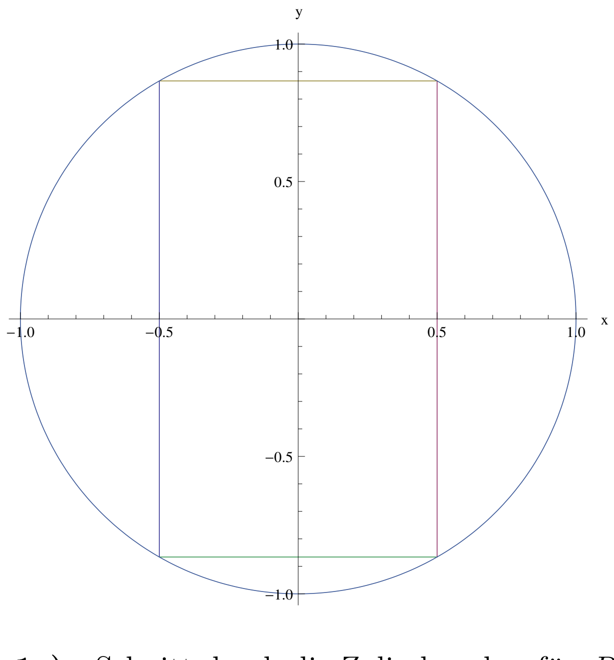

Bild 1a) Schnitt durch die Zylinderachse für $R = 1$

Nach einem Schnitt durch die Zylinderachse führt dies zu einem Rechteck mit den Seiten h und $2r$, das einem Kreis vom Radius R so einbeschrieben ist, dass seine Ecken genau auf dem Kreisradius liegen.

Der Satz des Pythagoras ergibt dann: $\quad r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2$

Neben der in Analysis III beschriebenen Lagrangschen Multiplikatorenregel für Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen, kann hier die Nebenbedingung aufgelöst und in V eingesetzt werden und man erhält eine Extremalaufgabe von einer Veränderlichen ohne Nebenbedingung:

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad V(h) = \pi h \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right),$$

wobei per Konstruktion $0 \le h \le 2R$ gilt.

Die Extrema im Inneren des Intervalls $[0, 2R]$ ergeben sich aus

$$V'(h) = \pi \left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2R}{\sqrt{3}},$$

$$V''(h) = -\frac{6\pi h}{4} \quad \Rightarrow \quad V''\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{12\pi R}{4\sqrt{3}} < 0\,.$$

Damit wird für $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ das maximale Zylindervolumen

$$V\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \pi \frac{2R}{\sqrt{3}} \left(R^2 - \frac{4R^2}{12}\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}} = V_{\max}$$

angenommen.

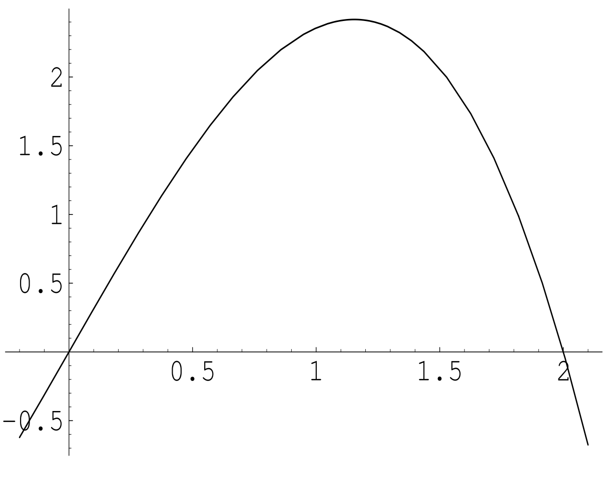

Bild 1 b) $\quad V(h) = \pi h \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)$ mit $R = 1$

Die minimalen Zylindervolumen werden am Rand, d.h. für $h = 0$ und $h = 2R$ mit $V_{\min} = 0$ angenommen.

Aufgabe 2:

a) Für die folgenden Kurven gebe man Parameterdarstellungen an und zeichne sie:

(i) die Gerade, die durch die Punkte $(-4,1)$ und $(2,-2)$ verläuft,

(ii) den durch $x^2+y^2+2x-6y+6=0$ beschriebenen Kreis.

b) Man zeichne die Hypozykloide mit $t \in [0,6\pi]$ und

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t)+\cos(2t) \\ 2\sin(t)-\sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) (i) Die Orts-, Richtungsvektordarstellung für eine Gerade durch die Punkte $\boldsymbol{a} = (-4,1)^T$ und $\boldsymbol{b} = (2,-2)^T$ lautet

$$\mathbf{c}(t) = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Mathematica Plotbefehl:

```
ParametricPlot[{{-4 + t (2 - (-4)), 1 + t (-2 - 1)}}, {t, -0.5, 2},
 AxesLabel -> {"x", "y"}, PlotRange -> {-4, 3}]
```

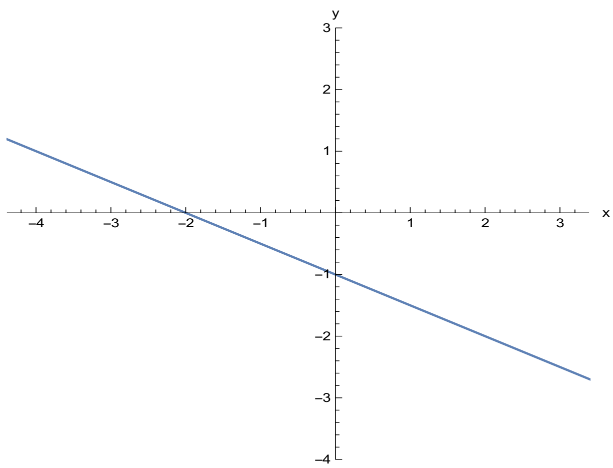

Bild 2 a) (i) Gerade durch $\boldsymbol{a} = (-4,1)^T$ und $\boldsymbol{b} = (2,-2)^T$

(ii) Mit quadratischer Ergänzung erhält man die Gleichung eines Kreises mit Radius $R=2$ und Mittelpunkt $(x_0,y_0) = (-1,3)$.

$$\begin{aligned} 0 &= x^2+y^2+2x-6y+6 \\ &= x^2+2x+1-1+y^2-6y+9-9+6 \\ &= (x+1)^2+(y-3)^2-4 \\ \Leftrightarrow\ 2^2 &= (x+1)^2+(y-3)^2 \end{aligned}$$

Parameterdarstellung durch Polarkoordinaten

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} -1 + 2\cos t \\ 3 + 2\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi[$$

Mathematica Plotbefehl:

```
ParametricPlot[{-1 + 2 Cos[t], 3 + 2 Sin[t]},
                  {t, 0, 2 Pi},  AxesLabel -> {"x", "y"}]
```

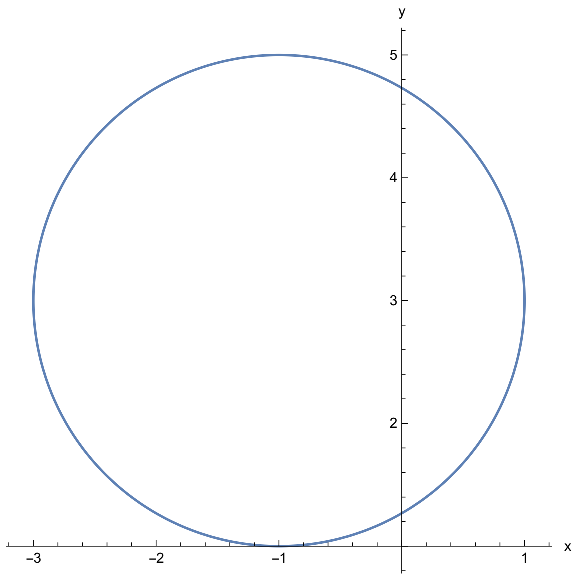

Bild 2 a) (ii) Kreis mit Radius $R = 2$ und Mittelpunkt $(x_0, y_0) = (-1, 3)$

b) Mathematica Plotbefehl:

```
ParametricPlot[{{2 Cos[t] + Cos[2 t],
   2 Sin[t] - Sin[2 t]}, {2 + Cos[t], Sin[t]}, {3 Cos[t],
   3 Sin[t]}}, {t, 0, 3 Pi}, AxesLabel -> {"x", "y"}]
```

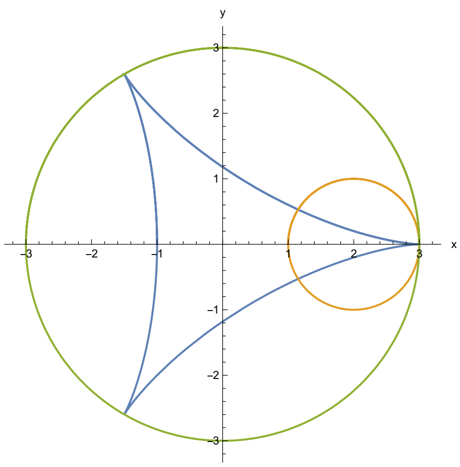

Bild 2 b) Hypozykloide mit $r = 1$ und $R = 3$

Wird ein kleiner Kreis mit Radius r innen in einem großen Kreis mit Radius R abgerollt, so beschreibt die Hypozykloide die Bahnkurve des Berührungspunktes P der beiden Kreise zu Beginn des Abrollens. Für $r = 1$ und $R = 3$ kehrt P nach $R/r = 3$-maligem abrollen in seinen Ausgangspunkt zurück.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die archimedische Spirale $\mathbf{c}$ in Polarkoordinaten mit $r(\varphi) = \varphi$ und $\varphi \in [0, 7\pi]$.

a) Man zeichne die archimedische Spirale.

b) Man berechne den Tangentenvektor zum Parameterwert φ im Kurvenpunkt $\mathbf{c}(\varphi)$. In welchen Kurvenpunkten ist $\mathbf{c}$ nicht regulär?

c) Man bestimme im Kurvenpunkt $\mathbf{c}(2\pi)$ den Anstieg sowie die Tangentengleichung in Parameterform und als Einzelgleichung und zeichne die Kurve $\mathbf{c}$ mit der Tangente.

d) Man gebe für die Länge des Kurvenbogens Δs zwischen $\mathbf{c}(2\pi)$ und $\mathbf{c}(3\pi)$ eine obere und untere Schranke an und berechne Δs näherungsweise unter Verwendung des Differentials der Bogenlänge zum Parameterwert $\varphi = 2\pi$.

Lösung:

a) $\mathbf{c}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi\cos\varphi \\ \varphi\sin\varphi \end{pmatrix}$, $\quad \varphi \in [0, 7\pi]$, $\quad$ Mathematica Plotbefehl

```
ParametricPlot[{t*Cos[t], t*Sin[t]}, {t, 0, 7 Pi},
 AxesLabel -> {"x", "y"}, AspectRatio -> 1]
```

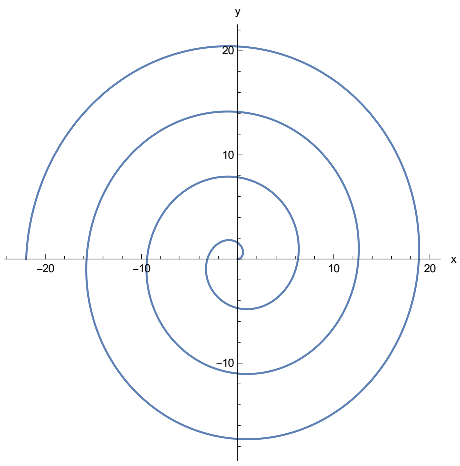

Bild 3 a) archimedische Spirale mit 3.5 Umläufen

b) Tangentenvektor: $\quad \mathbf{c}'(\varphi) = \begin{pmatrix} x'(\varphi) \\ y'(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi - \varphi\sin\varphi \\ \sin\varphi + \varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$

Für Länge des Tangentenvektors gilt

$$||\mathbf{c}'(\varphi)|| = \sqrt{(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)^2 + (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)^2} = \sqrt{1 + \varphi^2} \geq 1 > 0$$

Damit ist die Kurve in allen Punkte regulär.

c) Wird mit α der Winkel zwischen x-Achse und Tangentialvektor $\mathbf{c}'(\varphi)$ im Punkt $\mathbf{c}(\varphi)$ beschrieben, so ergibt sich der Anstieg durch

$$\tan\alpha = \frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)}.$$

Für $\varphi = 2\pi$ erhält man den Anstieg $\dfrac{y'(2\pi)}{x'(2\pi)} = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$.

Tangentengleichung in Parameterform mit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{T}(\lambda) = \mathbf{c}(2\pi) + \lambda\,\mathbf{c}'(2\pi) = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{2\pi + \lambda}^{=:x} \\ 2\pi\lambda \end{pmatrix}$$

Tangentengleichung als Einzelgleichung mit $x \in \mathbb{R}$

$$y(x) = y(2\pi) + \frac{y'(2\pi)}{x'(2\pi)}(x - x(2\pi)) = 2\pi(x - 2\pi)$$

Mathematica Plotbefehl

```
ParametricPlot[{{t*Cos[t], t*Sin[t]}, {2 Pi + (t - 3.5 Pi)/3.3,
   2 Pi (t - 3.5 Pi)/3.3}}, {t, 0, 7 Pi}, AxesLabel -> {"x", "y"}]
```

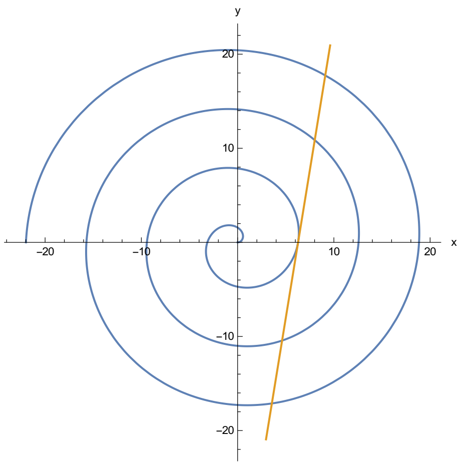

Bild 3 c) archimedische Spirale mit Tangente für $\varphi = 2\pi$

d) Die Bogenlängendifferenz wird durch die Bogenlängen πR der Halbkreise mit den Radien $R_1 = 2\pi$ und $R_2 = 3\pi$ eingeschlossen.
Es gilt also $19.739... = 2\pi^2 \leq \Delta s \leq 3\pi^2 = 29.608...$

Eine Näherung für die Bogenlängendifferenz Δs erhält man über das Differential der Bogenlänge mit $\varphi = 2\pi$ und $d\varphi = 3\pi - 2\pi = \pi$

$$\Delta s \approx ds = \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2}d\varphi = \left(\sqrt{1 + (2\pi)^2}\right)\pi = 19.987...$$

Mit Hilfe der Integration lässt sich (später) Δs exakt berechnen

$$\Delta s = \int_{2\pi}^{3\pi} \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2}d\varphi = \int_{2\pi}^{3\pi} \sqrt{1 + \varphi^2}d\varphi = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh}(\varphi) + \varphi\sqrt{1 + \varphi^2}\right)\Bigg|_{2\pi}^{3\pi} = 24.875...$$

Aufgabe 4:

Mit $x, y \in \mathbb{R}$ wird durch $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ eine Ellipse beschrieben.

a) Man bestimme eine Parametrisierung $\mathbf{c}(t)$ der Ellipse durch angepasste Polarkoordinaten.

b) Man berechne die Kurvenpunkte mit extremaler Krümmung,

c) die zugehörigen Krümmungskreise und

d) zeichne die Ellipse mit den Krümmungskreisen.

Lösung:

a) Parametrisierung $\mathbf{c}$ der Ellipse mit $t \in [0, 2\pi[$

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} -2\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

b) Die Krümmung berechnet man durch

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}} = \frac{(-2\sin t)\cdot(-\sin t) - (-2\cos t)\cdot(\cos t)}{((-2\sin t)^2 + \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{2}{(4\sin^2 t + \cos^2 t)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\kappa}(t) = -\frac{18\sin t\cos t}{(4\sin^2 t + \cos^2 t)^{5/2}} \begin{cases} = 0 & t = 0 & \text{strenges lokales Maximum} \\ < 0 & 0 < t < \pi/2 & \text{streng monoton fallend} \\ = 0 & t = \pi/2 & \text{strenges lokales Minimum} \\ > 0 & \pi/2 < t < \pi & \text{streng monoton wachsend} \\ = 0 & t = \pi & \text{strenges lokales Maximum} \\ < 0 & \pi < t < 3\pi/2 & \text{streng monoton fallend} \\ = 0 & t = 3\pi/2 & \text{strenges lokales Minimum} \\ > 0 & 3\pi/2 < t < 2\pi & \text{streng monoton wachsend} \end{cases}$$

Damit liegen strenge lokale (sogar globale) Maxima für $t_0 = 0$ und $t_2 = \pi$ mit Krümmungswert $\kappa(t_{0,2}) = 2$ in den Kurvenpunkten $\mathbf{c}(t_0) = (2, 0)^T$ und $\mathbf{c}(t_2) = (-2, 0)^T$ vor.

Strenge lokale (sogar globale) Minima liegen für $t_1 = \pi/2$ und $t_3 = 3\pi/2$ mit Krümmungswert $\kappa(t_{1,3}) = 1/4$ in den Kurvenpunkten $\mathbf{c}(t_1) = (0, 1)^T$ und $\mathbf{c}(t_3) = (0, -1)^T$ vor.

c) Für die Krümmungskreise erhält man

$\underline{t_0 = 0 \text{ und } t_2 = \pi:}$ Krümmungsradius: $\quad R = \dfrac{1}{\kappa(t_{0,2})} = \dfrac{1}{2}$

Krümmungsmittelpunkt:

$$\begin{pmatrix} x_1(t_{0,2}) \\ y_2(t_{0,2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_{0,2}) \\ y(t_{0,2}) \end{pmatrix} + \frac{\dot{x}(t_{0,2})^2 + \dot{y}(t_{0,2})^2}{\dot{x}(t_{0,2})\ddot{y}(t_{0,2}) - \ddot{x}(t_{0,2})\dot{y}(t_{0,2})} \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_{0,2}) \\ \dot{x}(t_{0,2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \pm 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mp 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{t_1 = \pi/2 \text{ und } t_3 = 3\pi/2:}$ Krümmungsradius: $R = \dfrac{1}{\kappa(t_{1,3})} = 4$

Krümmungsmittelpunkt:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1(t_{1,3}) \\ y_2(t_{1,3}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x(t_{1,3}) \\ y(t_{1,3}) \end{pmatrix} + \frac{\dot{x}(t_{1,3})^2 + \dot{y}(t_{1,3})^2}{\dot{x}(t_{1,3})\ddot{y}(t_{1,3}) - \ddot{x}(t_{1,3})\dot{y}(t_{1,3})} \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_{1,3}) \\ \dot{x}(t_{1,3}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ \mp 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mp 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

d) Mathematica Plotbefehl

```
ParametricPlot[
{{2 Cos[t], Sin[t]},{Cos[t]/2 - 3/2,Sin[t]/2}, {Cos[t]/2 + 3/2, Sin[t]/2},
 {4 Cos[t],4 Sin[t] - 3},{4 Cos[t], 4 Sin[t] + 3}}, {t, -Pi, Pi},
AxesLabel -> {"x", "y"}]
```

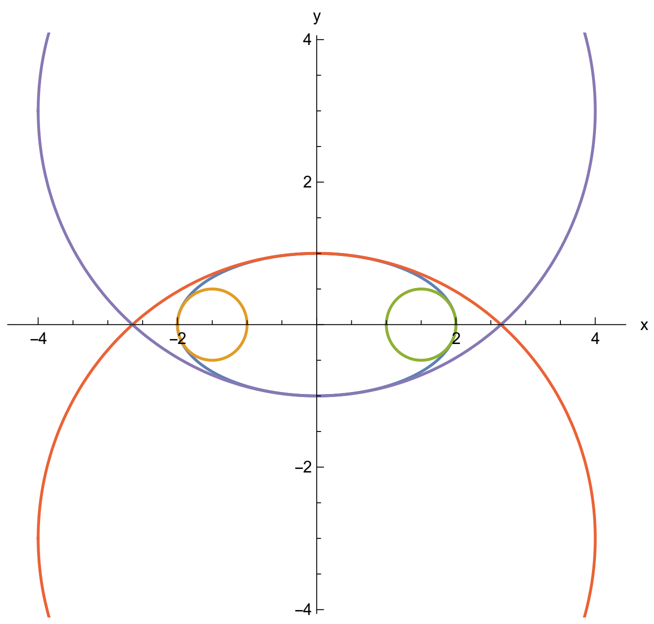

Bild 4 Ellipse mit Krümmungskreisen

Besprechungstermine: 7.4. - 9.4.21