Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 9:

Man berechne die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{2}{3x-4}\,dx\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{5}{(9x+1)^3}\,dx\,,$ c) $\displaystyle\int \frac{60x^2+33x-2}{5x+4}\,dx\,,$

d) $\displaystyle\int \frac{50}{x^2+25}\,dx\,,$ e) $\displaystyle\int \frac{8x}{x^2+1}\,dx\,,$ f) $\displaystyle\int \frac{8x-2}{x^2-2x+2}\,dx\,.$

Aufgabe 10:

Man berechne folgende Integrale ggf. unter Verwendung der Partialbruchzerlegungsmethode

a) $\displaystyle\int \frac{3x}{2x^2-2x-12}\,dx\,,$

b) $\displaystyle\int \frac{2x^3+9x^2-9x+4}{x^2+4x-5}\,dx\,,$

c) $\displaystyle\int \frac{2x+11}{(x^2+10x+26)^2}\,dx\,.$

Aufgabe 11:

Man berechne unter Verwendung der Partialbruchzerlegungsmethode

$$\int \frac{-17x^3+8x^2+67x-8}{x^4-2x^3-2x^2+6x+5}\,dx\,.$$

Aufgabe 12:

Gegeben sei die Funktion $f : [2,3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 10 - 3x$.

a) Man berechne für die äquidistante Zerlegung

$$Z_n = \left\{2, 2+\frac{1}{n}, 2+\frac{2}{n}, \cdots, 3\right\}$$

des Intervalls $I = [2,3]$ Unter- und Obersumme zu f.

b) Man weise die Integrierbarkeit von f nach.

c) Man berechne $\int\limits_2^3 10 - 3x\, dx$ über den Hauptsatz.

Fragen zur Vorlesung:

Für die numerische Integration bestimmter Integrale $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ werden sogenannte *Quadraturformeln* verwendet. Diese Verfahren haben die Form

$$\hat{I}_n(f) = (b-a)\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k),$$

wobei λ_k *Gewichte* und x_k *Stützstellen* genannt werden. Die Approximationsgüte dieser Näherungen wird mit Hilfe von Polynomen definiert. Man sagt, dass die Quadraturformel *von der Ordnung* p ist, wenn sie ein Polynom vom Grad p exakt integriert. Wir wollen uns hier auf Quadraturformeln der Ordnung 0 und 1 beschränken.

a) (Eigenschaft der Gewichte) Eine wichtige Eigenschaft der Quadratur ist, dass sie das konstante Polynom $p_0(x) \equiv 1$ exakt integriert. Welche Eigenschaft an die Gewichte muss die Quadratur erfüllen?

b) (Positivität) Eine weitere wichtige Eigenschaft der Integration, die auch von der numerischen Approximation erfüllt werden soll, ist die Positivitätserhaltung: Falls $f(x) \geq 0$, für $x \in [a,b]$, so gilt $I(f) \geq 0$. Unter welcher Bedingung an die Gewichte gilt diese Eigenschaft auch für $\hat{I}_n(f)$?

c) (Konsistenz) Man nennt eine Quadraturformel konsistent, wenn $p \geq 1$. Zeigen Sie, dass schon für $n = 0$ bei geeigneter Wahl von λ_0 und x_0 eine konsistente Quadraturformel für Polynome vom Grad 1 gefunden werden kann. *Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz.*

Besprechungstermine: 5.5. - 7.5.21