Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 3

Aufgabe 9:

Man berechne die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{2}{3x-4}\,dx\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{5}{(9x+1)^3}\,dx\,,$ c) $\displaystyle\int \frac{60x^2+33x-2}{5x+4}\,dx\,,$

d) $\displaystyle\int \frac{50}{x^2+25}\,dx\,,$ e) $\displaystyle\int \frac{8x}{x^2+1}\,dx\,,$ f) $\displaystyle\int \frac{8x-2}{x^2-2x+2}\,dx\,.$

Lösung:

a) Substitution: $t = 3x-4 \quad \to \quad dt = 3\,dx$

$$\int \frac{2}{3x-4}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{2}{3}\ln|t| + C = \frac{2}{3}\ln|3x-4| + C$$

b) Substitution: $t = 9x+1 \quad \to \quad dt = 9\,dx$

$$\int \frac{5}{(9x+1)^3}\,dx = \frac{5}{9}\int \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{5}{18}t^{-2} + C = -\frac{5}{18(9x+1)^2} + C$$

c) Polynomdivision:

$$
\begin{array}{rrl}
(60x^2 + 33x & -2) : (5x+4) & = 12x - 3 + \dfrac{10}{5x+4} \\
-(60x^2 + 48x) & & \\
\hline
-15x & -2 & \\
-(-15x & -12) & \\
\hline
 & 10 &
\end{array}
$$

$$\int \frac{60x^2 + 33x - 2}{5x+4}\, dx = \int 12x - 3 + \frac{10}{5x+4}\, dx$$

Substitution: $\quad t = 5x + 4 \quad \rightarrow \quad dt = 5\, dx$

$$= 6x^2 - 3x + \frac{10}{5} \int \frac{1}{t} dt + C = 6x^2 - 3x + 2\ln|t| + C = 6x^2 - 3x + 2\ln|5x+4| + C$$

d) $\displaystyle\int \frac{50}{x^2+25}\, dx = \int \frac{2}{(x/5)^2+1}\, dx$

Substitution: $\quad t = \dfrac{x}{5} \rightarrow dx = 5\, dt$

$$= \int \frac{10}{t^2+1}\, dt = 10\arctan(t) + C = 10\arctan\left(\frac{x}{5}\right) + C$$

e) Substitution: $\quad t = x^2 + 1 \rightarrow dt = 2x\, dx$

$$\int \frac{8x}{x^2+1}\, dx = \int \frac{4 \cdot 2x}{x^2+1}\, dx = \int \frac{4}{t}\, dt = 4\ln|t| + C = 4\ln|x^2+1| + C$$

f) $\displaystyle\int \frac{8x-2}{x^2-2x+2}\, dx = \int \frac{4(2x-2)+6}{(x-1)^2+1}\, dx$

$$= 4\int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}\, dx + 6\int \frac{1}{(x-1)^2+1}\, dx$$

Substitution: $\quad t = x - 1 \rightarrow dt = dx$

$$= 4\int \frac{2t}{t^2+1}\, dt + 6\int \frac{1}{t^2+1}\, dt$$

Substitution: $\quad u = t^2 + 1 \rightarrow du = 2t\, dt$

$$= 4\int \frac{1}{u}\, du + 6\arctan t \; = 4\ln|u| + 6\arctan t + C$$

$$= 4\ln|t^2+1| + 6\arctan(x-1) + C \; = 4\ln|x^2-2x+2| + 6\arctan(x-1) + C$$

Aufgabe 10:

Man berechne folgende Integrale ggf. unter Verwendung der Partialbruchzerlegungsmethode

a) $\displaystyle\int \frac{3x}{2x^2 - 2x - 12}\, dx\,,$

b) $\displaystyle\int \frac{2x^3 + 9x^2 - 9x + 4}{x^2 + 4x - 5}\, dx\,,$

c) $\displaystyle\int \frac{2x + 11}{(x^2 + 10x + 26)^2}\, dx\,.$

Lösung:

a) Nennerfaktorisierung: $\quad 2x^2 - 2x - 12 = 2(x^2 - x - 6) = 2(x+2)(x-3)$

$$\Rightarrow \quad \frac{3x}{2x^2 - 2x - 12} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{x}{x^2 - x - 6} \right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{x}{(x+2)(x-3)} \right)$$

Partialbruchzerlegungsansatz:

$$\frac{x}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

$$\Rightarrow \quad x = A(x-3) + B(x+2)$$

Nennernullstellen einsetzen:

$$x = -2 \quad \Rightarrow \quad -2 = A(-2-3) + B(-2+2) = -5A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2}{5}$$

$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad 3 = A(3-3) + B(3+2) = 5B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{3x}{2x^2 - 2x - 12}\, dx \quad = \quad \frac{3}{2} \int \frac{2}{5}\frac{1}{x+2} + \frac{3}{5}\frac{1}{x-3}\, dx$$

$$= \quad \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \ln|x+2| + \frac{3}{5} \ln|x-3| \right) + C$$

b) Polynomdivision

$$\begin{array}{r}(2x^3+9x^2-9x+4) \\ -(2x^3+8x^2-10x) \\ \hline x^2+x+4 \\ -(x^2+4x-5) \\ \hline -3x+9\end{array} \quad : (x^2+4x-5) = 2x+1+\frac{-3x+9}{x^2+4x-5}$$

Nennerfaktorisierung: $x^2+4x-5 = (x-1)(x+5)$

Partialbruchzerlegungsansatz:

$$\frac{-3x+9}{x^2+4x-5} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x-1)}{(x-1)(x+5)} \Rightarrow -3x+9 = A(x+5)+B(x-1)$$

Berechnung von A und B über einen Koeffizientenvergleich von

$$-3x+9 = A(x+5)+B(x-1) = (A+B)x+5A-B$$

$$9 = 5A-B \quad \Rightarrow \quad B = 5A-9$$
$$-3 = A+B = A+5A-9 = 6A-9$$
$$\Rightarrow \quad 6A = 6 \quad \Rightarrow \quad A = 1 \quad \Rightarrow \quad B = -4$$

alternativ:

Berechnung von A und B durch Einsetzen von x-Werten, vorzugsweise der Nennernullstellen in die Gleichung $-3x+9 = A(x+5)+B(x-1)$:

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad -3+9 = A(1+5)+B(1-1) \quad \Rightarrow \quad A = 1$$
$$x = -5 \quad \Rightarrow \quad -3(-5)+9 = A(-5+5)+B(-5-1) = -6B \quad \Rightarrow \quad B = -4$$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+9x^2-9x+4}{x^2+4x-5}\,dx &= \int 2x+1+\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x+5}\,dx \\ &= x^2+x+\ln|x-1|-4\ln|x+5|+C\end{aligned}$$

c) Dieses Integral wird über die Rekursionsformel mit $\ell = 2$ berechnet

$$\int \frac{2x+11}{(x^2+10x+26)^2}\,dx = \int \frac{2x+10}{((x+5)^2+1)^2}+\frac{1}{((x+5)^2+1)^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{(x+5)^2+1}+\frac{1}{2(1-2)}\left((3-2\cdot 2)\int \frac{1}{(x+5)^2+1}\,dx-\frac{x+5}{(x+5)^2+1}\right)+C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arctan(x+5)+\frac{x+3}{(x+5)^2+1}\right)+C$$

Aufgabe 11:

Man berechne unter Verwendung der Partialbruchzerlegungsmethode

$$\int \frac{-17x^3+8x^2+67x-8}{x^4-2x^3-2x^2+6x+5}\,dx\,.$$

Lösung:

Raten der Nennernullstelle $x=-1$ (Teiler der Konstanten 5) und Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\quad(x^4-2x^3-2x^2+6x+5):(x+1)=x^3-3x^2+x+5\\
-\underline{(x^4+x^3)}\\
\qquad\quad -3x^3-2x^2+6x+5\\
\qquad -\underline{(-3x^3-3x^2)}\\
\qquad\qquad\quad x^2+6x+5\\
\qquad\qquad -\underline{(x^2+x)}\\
\qquad\qquad\quad 5x+5\\
\qquad\qquad -\underline{(5x+5)}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Erneutes Raten der Nullstelle $x=-1$ (Teiler der Konstanten 5) und Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\quad(x^3-3x^2+x+5):(x+1)=x^2-4x+5\\
-\underline{(x^3+x^2)}\\
\qquad\quad -4x^2+x+5\\
\qquad -\underline{(-4x^2-4x)}\\
\qquad\qquad\quad 5x+5\\
\qquad\qquad -\underline{(5x+5)}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Damit lautet die Nennerfaktorisierung:

$$x^4-2x^3-2x^2+6x+5=(x+1)^2(x^2-4x+5)=(x+1)^2((x-2)^2+1)$$

$$\Rightarrow \int \frac{-17x^3+8x^2+67x-8}{x^4-2x^3-2x^2+6x+5}\,dx=\int \frac{-17x^3+8x^2+67x-8}{(x+1)^2(x^2-4x+5)}\,dx$$

<u>Partialbruchzerlegungsansatz:</u>

$$\frac{-17x^3+8x^2+67x-8}{(x+1)^2(x^2-4x+5)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{(x-2)^2+1}\qquad\Rightarrow$$

$$-17x^3+8x^2+67x-8=A(x+1)((x-2)^2+1)+B((x-2)^2+1)+(Cx+D)(x+1)^2$$

Koeffizienten über Einsetzen verschiedener x-Werte berechnen:

Berechnung von B:

$x = -1: \quad 17 + 8 - 67 - 8 = B((-3)^2 + 1) \quad \Rightarrow \quad B = -5$

Berechnung von A:

Ableiten

$-51x^2 + 16x + 67$

$= A((x-2)^2 + 1) - 5 \cdot 2(x-2) + (x+1)[2A(x-2) + C(x+1) + 2(Cx + D)]$

$x = -1:$

$0 = -51 - 16 + 67 = A((-3)^2 + 1) - 10(-1-2) \quad \Rightarrow \quad A = -3$

Berechnung von C und D durch Einsetzen geeigneter x Werte:

$x = 0:$

$-8 = A(0+1)((0-2)^2 + 1) + B((0-2)^2 + 1) + (C \cdot 0 + D)(0+1)^2$

$= -3 \cdot 5 - 5 \cdot 5 + D \quad \Rightarrow \quad D = 32$

$x = 1:$

$50 = -17 + 8 + 67 - 8$

$= A(1+1)((1-2)^2 + 1) + B((1-2)^2 + 1) + (C + D)(1+1)^2$

$= -3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 4(C + 32) \quad \Rightarrow \quad C = -14$

Damit kann das Integral mittels Partialbruchzerlegung berechnet werden

$$\int \frac{-17x^3 + 8x^2 + 67x - 8}{x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x + 5}\, dx$$

$$= \int -\frac{3}{x+1} - \frac{5}{(x+1)^2} + \frac{-14x + 32}{(x-2)^2 + 1}\, dx$$

$$= -3\ln|x+1| + \frac{5}{x+1} + \int \frac{-14(x-2) + 4}{(x-2)^2 + 1}\, dx$$

$$= -3\ln|x+1| + \frac{5}{x+1} - 7\ln|(x-2)^2 + 1| + 4\arctan(x-2) + K$$

Aufgabe 12:

Gegeben sei die Funktion $f : [2,3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 10 - 3x$.

a) Man berechne für die äquidistante Zerlegung

$$Z_n = \left\{2, 2+\frac{1}{n}, 2+\frac{2}{n}, \cdots, 3\right\}$$

des Intervalls $I = [2,3]$ Unter- und Obersumme zu f.

b) Man weise die Integrierbarkeit von f nach.

c) Man berechne $\int\limits_2^3 10 - 3x\,dx$ über den Hauptsatz.

Lösung:

a) Mit $x_i = 2 + \frac{i}{n}$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ erhält man

$$\begin{aligned}
U_f(Z_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \inf f([x_i, x_{i+1}])(x_{i+1} - x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(10 - 3\left(2 + \frac{i+1}{n}\right)\right)\left(2 + \frac{i+1}{n} - \left(2 + \frac{i}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(10 - 6 - 3\frac{i+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(4n - \frac{3}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_f(Z_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sup f([x_i, x_{i+1}])(x_{i+1} - x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(10 - 3\left(2 + \frac{i}{n}\right)\right)\left(2 + \frac{i+1}{n} - \left(2 + \frac{i}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(4 - 3\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(4n - \frac{3}{n}\frac{(n-1)n}{2}\right) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2n}
\end{aligned}$$

b) f ist integrierbar, denn f ist stetig. Der Wert des Integrals ergibt sich durch

$$\lim_{n\to\infty} O_f(Z_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2n}\right) = \frac{5}{2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} U_f(Z_n)\,.$$

c) $$\int\limits_2^3 10 - 3x\,dx = \left(10x - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_2^3 = \frac{5}{2}$$

Fragen zur Vorlesung:

Für die numerische Integration bestimmter Integrale $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ werden sogenannte *Quadraturformeln* verwendet. Diese Verfahren haben die Form

$$\hat{I}_n(f) = (b-a)\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k),$$

wobei λ_k *Gewichte* und x_k *Stützstellen* genannt werden. Die Approximationsgüte dieser Näherungen wird mit Hilfe von Polynomen definiert. Man sagt, dass die Quadraturformel *von der Ordnung* p ist, wenn sie ein Polynom vom Grad p exakt integriert. Wir wollen uns hier auf Quadraturformeln der Ordnung 0 und 1 beschränken.

a) (Eigenschaft der Gewichte) Eine wichtige Eigenschaft der Quadratur ist, dass sie das konstante Polynom $p_0(x) \equiv 1$ exakt integriert. Welche Eigenschaft an die Gewichte muss die Quadratur erfüllen?

b) (Positivität) Eine weitere wichtige Eigenschaft der Integration, die auch von der numerischen Approximation erfüllt werden soll, ist die Positivitätserhaltung: Falls $f(x) \geq 0$, für $x \in [a,b]$, so gilt $I(f) \geq 0$. Unter welcher Bedingung an die Gewichte gilt diese Eigenschaft auch für $\hat{I}_n(f)$?

c) (Konsistenz) Man nennt eine Quadraturformel konsistent, wenn $p \geq 1$. Zeigen Sie, dass schon für $n = 0$ bei geeigneter Wahl von λ_0 und x_0 eine konsistente Quadraturformel für Polynome vom Grad 1 gefunden werden kann. *Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz.*

Lösung:

a) Es gilt: $I(p_0) = \int_a^b dx = b-a$. Wir müssen also erreichen, dass $\hat{I}_n(p_0) = b-a$. Also folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k p_0(x_k) &\stackrel{!}{=} 1 \\ \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k &= 1. \end{aligned}$$

Die Quadraturformel für $\lambda_0 = \lambda_1 = \frac{1}{2}$ *ist für lineare Polynome exakt und entspricht der Trapezregel.*

b) Falls gelten soll $\hat{I}_n(f) \geq 0$ für $f(x) \geq 0$ ($x \in [a,b]$), so muss also

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k) &\stackrel{!}{\geq} 0 \quad \text{wobei } f(x_k) \geq 0. \\ \Leftrightarrow \qquad \lambda_k &\geq 0 \quad \forall k. \end{aligned}$$

c) Nach dem Mittelwertsatz gilt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)(b-a)$$

für $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ stetig und $\xi \in]a, b[$. Da lineare Polynome stetig sind, sind die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllt. Damit ist $\hat{I}_0(f)$ exakt für $\lambda_0 = 1$ und $x_0 = \xi$.

Bemerkung: In diesem Fall könnte man ξ sogar explizit angeben mit $\xi = \frac{b+a}{2}$

$$\int_a^b x\, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = (b-a)\frac{b+a}{2}.$$

Besprechungstermine: 5.5. - 7.5.21