Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

a) Für folgende Potenzreihen bestimme man den Entwicklungspunkt und berechne den Konvergenzradius.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+4}\, x^n\,, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9n+2}{5n+1}\right)^n (x+3)^n\,.$$

b) Man bestimme den Entwicklungspunkt, den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls (mit Begründung).

Aufgabe 22:

Gegeben sei die durch $\quad f(x) = \dfrac{2}{3x+4} \quad$ definierte Funktion.

a) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe von f zum Entwicklungspunkt z_0 und bestimme deren Konvergenzradius für $z_0 = 1 + i$.

b) Man bestimme die Glieder der Potenzreihenentwicklung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ über das Cauchy-Produkt von Reihen und berechne den zugehörigen Konvergenzradius.

Aufgabe 23:

a) Unter Verwendung der Potenzreihe von

$$f(x) = \frac{2}{3x+4}$$

berechne man die Potenzreihe von

$$g(x) = \frac{1}{(3x+4)^3}$$

zum Entwicklungspunkt x_0 und bestimme den zugehörigen Konvergenzradius.

b) Man berechne die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = y$$

mit dem Anfangswert $y(0) = 3$ in folgender Potenzreihendarstellung

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k .$$

Aufgabe 24:

Gegeben sei die durch $f(x) = \ln(2+x)$ definierte Funktion.

a) Man berechne die Ableitung von f und damit die Potenzreihe von $\ln(2+x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.

b) Man untersuche das Konvergenzverhalten der unter a) bestimmten Potenzreihe in den Randpunkten und berechne im Falle der Konvergenz den Wert der entsprechenden Reihe.

c) Man zeige, dass $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$ gilt.

d) Man berechnet die Taylor-Reihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Dazu beweise man zunächst über Induktion

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2+x)^n}\,, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Besprechungstermine: 23.6. - 25.6.21