Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 6

Aufgabe 21:

a) Für folgende Potenzreihen bestimme man den Entwicklungspunkt und berechne den Konvergenzradius.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+4}\, x^n \,, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9n+2}{5n+1}\right)^n (x+3)^n \,.$$

b) Man bestimme den Entwicklungspunkt, den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls (mit Begründung).

Lösung:

a) (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+4}}_{=a_n} x^n \,,$

Entwicklungspunkt: $x_0 = 0$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+4} \cdot \frac{(n+1)^2+4}{\sqrt{n+2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1+1/n}{1+2/n}} \cdot \frac{1+2/n+5/n^2}{1+4/n^2} = 1$$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9n+2}{5n+1}\right)^n (x+3)^n$

Entwicklungspunkt: $x_0 = -3$

Konvergenzradius:

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{9n+2}{5n+1}\right|^n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{9n+2}{5n+1}} = \frac{5}{9}$$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n+1}} \left(x + \frac{1}{2}\right)^n$

Entwicklungspunkt: $x_0 = -\frac{1}{2}$

Konvergenzradius: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n\sqrt{n+2}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2}$

Konvergenz in den Randpunkten:

$x_1 = 0$, Divergenz nach dem Minorantenkriterium:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty\,.$$

$x_2 = -1$, Konvergenz nach dem Leibnizkriterium:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\,.$$

Man erhält also insgesamt das Konvergenzintervall $[-1, 0[$.

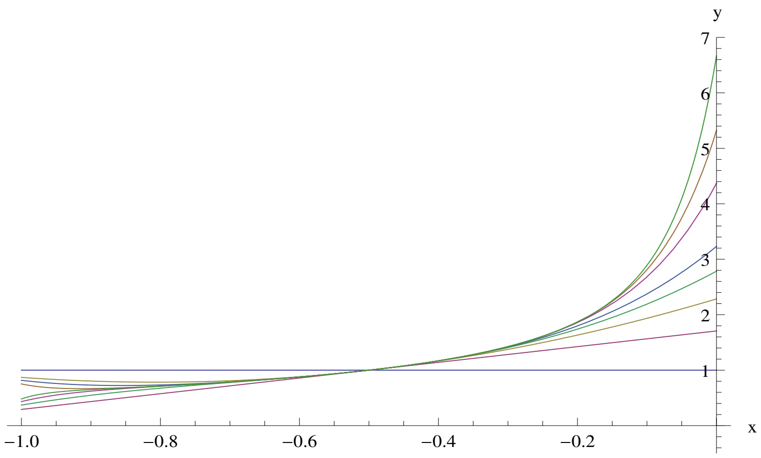

Bild 21: $\displaystyle S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{2^n}{\sqrt{n+1}} \left(x + \frac{1}{2}\right)^n$ für $N = 0, 1, 2, 3, 4, 7, 10, 15$

Aufgabe 22:

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{2}{3x+4}$ definierte Funktion.

a) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe von f zum Entwicklungspunkt z_0 und bestimme deren Konvergenzradius für $z_0 = 1 + i$.

b) Man bestimme die Glieder der Potenzreihenentwicklung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ über das Cauchy-Produkt von Reihen und berechne den zugehörigen Konvergenzradius.

Lösung:

a)
$$\begin{aligned} \frac{2}{3z+4} &= \frac{2}{3z-3z_0+3z_0+4} = \frac{2}{3z_0+4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{3(z-z_0)}{3z_0+4}\right)} \\ &= \frac{2}{3z_0+4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{3(z-z_0)}{3z_0+4}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2\cdot 3^k}{(3z_0+4)^{k+1}}(z-z_0)^k \end{aligned}$$

Berechnung des Konvergenzradius:

$$r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2\cdot 3^k(3z_0+4)^{k+2}}{2\cdot 3^{k+1}(3z_0+4)^{k+1}}\right| = \left|\frac{3z_0+4}{3}\right|$$

Die Konvergenzbedingung der geometrischen Reihe wird bestätigt:

$$\left|\frac{3(z-z_0)}{3z_0+4}\right| < 1 \quad\Rightarrow\quad |z-z_0| < \left|\frac{3z_0+4}{3}\right| = \left|z_0-\left(-\frac{4}{3}\right)\right| = r$$

Man beachte: $x = -\dfrac{4}{3}$ ist Polstelle von f.

Der Konvergenzradius für $z_0 = 1 + i$:

$$r = \left|1+i-\left(-\frac{4}{3}\right)\right| = \left|\frac{7}{3}+i\right| = \frac{\sqrt{58}}{3}$$

b) Die kurze Variante:

$$\frac{2}{3x+4} = f(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 2 &= (3x+4)(d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots) \\ &= 4d_0 + (4d_1 + 3d_0)x + (4d_2 + 3d_1)x^2 + \cdots \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$\Rightarrow\ 2 = 4d_0\,, \quad 0 = 4d_k + 3d_{k-1}$

$\Rightarrow\ d_0 = \frac{1}{2}\,, \quad d_k = -\frac{3}{4} d_{k-1} = \cdots = \left(-\frac{3}{4}\right)^k d_0$

Man erhält also $\quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)^k x^k\,.$

Konvergenzradius: $\quad r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{d_k}{d_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)^k}{\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)^{k+1}}\right| = \frac{4}{3}$

Alternativrechnung mit der Rekursionsformel (Methode identisch):

$f(x) = \frac{2}{3x+4} = \frac{1}{\frac{3}{2}x + 2}\,.$

Für $g(x) = \frac{3}{2}x + 2$ gilt $g(0) \neq 0$ und damit besitzt f in $x_0 = 0$ eine Potenzreihenentwicklung

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$$

mit Konvergenzradius $r > 0$ und die Koeffizienten d_k lassen sich nach der Rekursionsformel aus dem Cauchy-Produkt berechnen:

$$a_0 d_0 = 1\,, \quad a_0 d_k = -\sum_{j=0}^{k-1} d_j a_{k-j}$$

mit

$$g(x) = \frac{3}{2}x + 2 =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \Rightarrow \quad a_0 = 2\,,\ a_1 = \frac{3}{2}\,,\ a_k = 0\,,\ k \geq 2\,.$$

Man erhält damit $\quad d_0 = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{2}\,,$

$$d_k = -\frac{1}{a_0}\sum_{j=0}^{k-1} d_j a_{k-j} = -\frac{a_1}{a_0} d_{k-1} = -\frac{3}{4} d_{k-1} \cdots = \left(-\frac{3}{4}\right)^k d_0 = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)^k$$

Aufgabe 23:

a) Unter Verwendung der Potenzreihe von

$$f(x) = \frac{2}{3x+4}$$

berechne man die Potenzreihe von

$$g(x) = \frac{1}{(3x+4)^3}$$

zum Entwicklungspunkt x_0 und bestimme den zugehörigen Konvergenzradius.

b) Man berechne die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = y$$

mit dem Anfangswert $y(0) = 3$ in folgender Potenzreihendarstellung

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k .$$

Lösung:

a) $$f(x) = \frac{2}{3x+4} \;\Rightarrow\; f'(x) = -\frac{6}{(3x+4)^2} \;\Rightarrow\; f''(x) = \frac{36}{(3x+4)^3}$$

$$\Rightarrow\; g(x) = \frac{1}{(3x+4)^3} = \frac{f''(x)}{36}$$

Damit ergibt sich die Potenzreihe von g durch zweimaliges differenzieren der Potenzreihe von f:

$$g(x) \;=\; \frac{1}{36}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2\cdot 3^k}{(3x_0+4)^{k+1}}(x-x_0)^k\right)'' = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^k \cdot k(k-1)}{18(3x_0+4)^{k+1}}(x-x_0)^{k-2} .$$

Der Konvergenzradius stimmt mit dem von f überein. Probe:

$$\begin{aligned} r &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{3^k\cdot k(k-1)(3x_0+4)^{k+2}}{(3x_0+4)^{k+1}(k+1)k3^{k+1}}\right| \\ &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k-1)(3x_0+4)}{(k+1)3}\right| = \left|\frac{3x_0+4}{3}\right| = \left|x_0 - \left(-\frac{4}{3}\right)\right| . \end{aligned}$$

b) Im Inneren des Konvergenzintervalls darf die Potenzreihe gliedweise differenziert werden. Setzt man die Potenzreihe und ihre erste Ableitung in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{k+1}(k+1) - a_k) x^k = 0\,.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich mit der Nullfunktion ergibt sich folgende Rekursionsformel zur Berechnung der a_k:

$$a_{k+1}(k+1) - a_k = 0 \;\Rightarrow\; a_{k+1} = \frac{a_k}{k+1} = \frac{a_{k-1}}{(k+1)k} = \cdots = \frac{a_0}{(k+1)!}\,.$$

Der Anfangswert ergibt $y(0) = a_0 = 3 \Rightarrow a_k = \dfrac{3}{k!}$ und damit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{k!} x^k = 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 3e^x$$

als Lösung der Differentialgleichung. Der Konvergenzradius berechnet sich durch

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{3(k+1)!}{3 \cdot k!} \right| = \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty\,.$$

Aufgabe 24:

Gegeben sei die durch $f(x) = \ln(2+x)$ definierte Funktion.

a) Man berechne die Ableitung von f und damit die Potenzreihe von $\ln(2+x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.

b) Man untersuche das Konvergenzverhalten der unter a) bestimmten Potenzreihe in den Randpunkten und berechne im Falle der Konvergenz den Wert der entsprechenden Reihe.

c) Man zeige, dass $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$ gilt.

d) Man berechnet die Taylor-Reihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Dazu beweise man zunächst über Induktion

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2+x)^n}\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

Lösung:

a) Unter Benutzung der geometrischen Reihe erhält man für $|x/2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$

$$f'(x) = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-(x/2))} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\, x^n\,.$$

die Potenzreihe von f' mit dem Konvergenzradius $r = 2$.

Gliedweise Integration der Reihe liefert wegen $f(0) = \ln(2)$ die Potenzreihe von f

$$f(x) = \ln(2+x) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}\, x^{n+1} = \ln(2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}\, x^{n+1}\,.$$

b) Der Randpunkt $x = -2$ führt auf die harmonische Reihe

$$\ln(2) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

und man erhält keine Konvergenz.

Für den Randpunkt $x = 2$ erhält man mit der alternierenden harmonischen Reihe

$$\ln(2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Konvergenz. Konvergiert eine Potenzreihe in den Randpunkten, so ergibt sich nach dem Abelschen Grenzwertsatz dort der Wert der stetigen Fortsetzung der Summenfunktion im Inneren.

Man erhält also im Randpunkt $x = 2$ den Wert

$$\ln(4) = \ln(2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\,.$$

c) Mit b) erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(4) - \ln(2) = \ln(2)\,.$$

d) Induktionsbeweis für $\quad f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2+x)^n}\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,.$

$$n = 1: \qquad \frac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{(2+x)^1} = \frac{1}{2+x} = f'(x)$$

$n \to n+1:$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left(\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2+x)^n}\right)' \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(-n)\cdot(n-1)!}{(x+2)^{n+1}} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+2)^{n+1}} \end{aligned}$$

Die Taylor-Reihe von f lautet $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n\,.$

Im Konvergenzbereich erhält man für $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,(x-0)^n = \ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!(2+0)^n}\,x^n \\ &= \ln(2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}} x^{n+1} \end{aligned}$$

Wie erwartet stimmt diese mit der Reihe aus a) überein, d.h. Konvergenzradius $r = 2$ und keine Konvergenz bei $x = -2$.

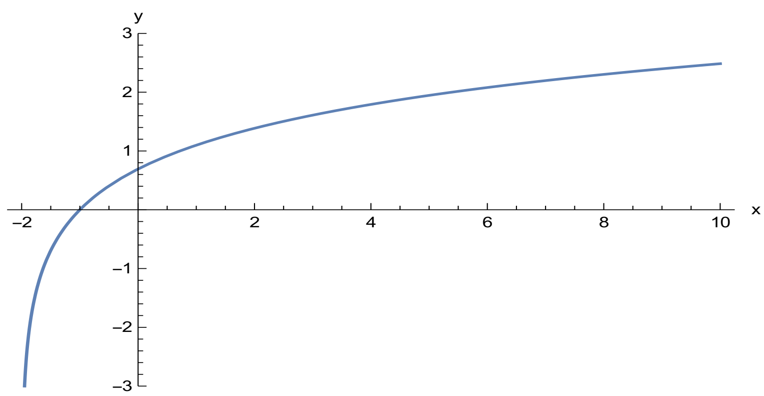

Bild 24 d) $\quad f(x) = \ln(2+x)\,, \quad$ Definitionslücke bei $x = -2$

Besprechungstermine: 23.6. - 25.6.21