Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 7

Aufgabe 25:

Gegeben sei die Funktion $f : [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1 - 2|x|$.

a) Man zeichne die 1-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f .

b) Man berechne die Fourier-Reihe dieser 1-periodischen Fortsetzung.

c) Man zeichne die Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_5(x)$ der berechneten Fourierreihe.

d) Man zeige mit Hilfe von b) die Identität $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Lösung:

a)

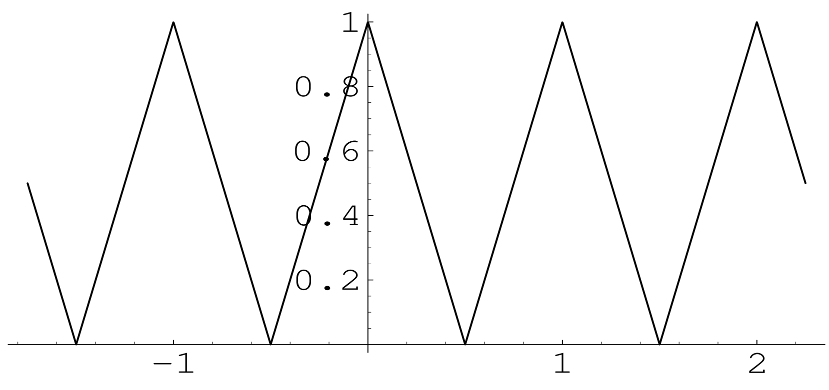

Bild 25 a): 1-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f

b) Da f gerade ist

$$0 \le x \le 1/2: \quad f(x) = 1 - 2|x| = 1 - 2|-x| = f(-x),$$

gilt $b_k = 0$.

Mit den Bezeichnungen des Skriptes ist $T = 1 \Rightarrow \omega = 2\pi/T = 2\pi$

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,dx = 4\int_0^{1/2} 1 - 2x\,dx = 4(x - x^2)\Big|_0^{1/2} = 1$$

$$a_{k\ge1} = 4\int_0^{1/2} (1-2x)\cos(2k\pi x)\,dx$$

$$= 4\left\{ \frac{(1-2x)\sin(2k\pi x)}{2k\pi}\Bigg|_0^{1/2} + \frac{2}{2k\pi}\int_0^{1/2} \sin(2k\pi x)\,dx \right\}$$

$$= -\frac{8\cos(2k\pi x)}{(2k\pi)^2}\Bigg|_0^{1/2} = -\frac{2((-1)^k - 1)}{(k\pi)^2} = \begin{cases} \dfrac{4}{(k\pi)^2} & k = 2n-1 \\ 0 & k \text{ gerade} \end{cases}$$

Damit lautet die Fourier-Reihe $\quad F_f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)2\pi x)}{(2n-1)^2}$.

c)

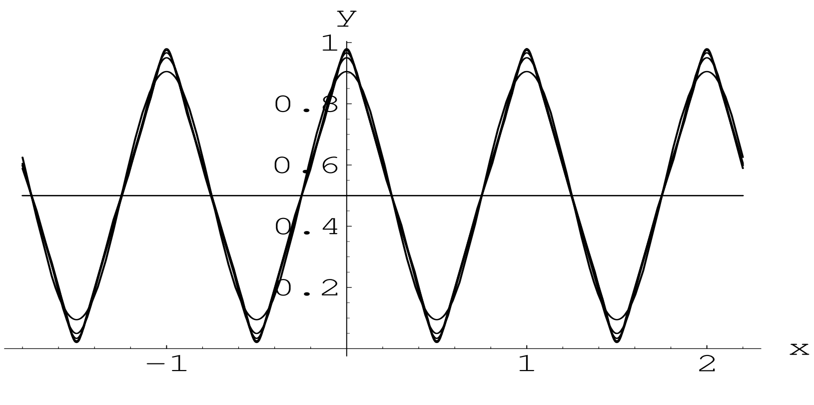

Bild 25 c): Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_5(x)$

d) Da f stückweise C^1-Funktion und stetig in $x = 0$ ist, konvergiert die Fourier-Reihe dort gegen f. Es gilt also

$$1 = f(0) = F_f(0) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Aufgabe 26:

Gegeben sei die 4π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -2\pi \le x \le 0 \quad , \\ (x-\pi)^2 - \pi^2 & , \quad 0 \le x \le 2\pi \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die 4π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion im Intervall $[-4\pi, 6\pi]$.

b) Man berechne die zugehörige Fourier-Reihe.

c) Man zeichne die Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_3(x)$ der berechneten Fourierreihe.

d) Mit Hilfe von b) zeige man die Identität $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Lösung:

a)

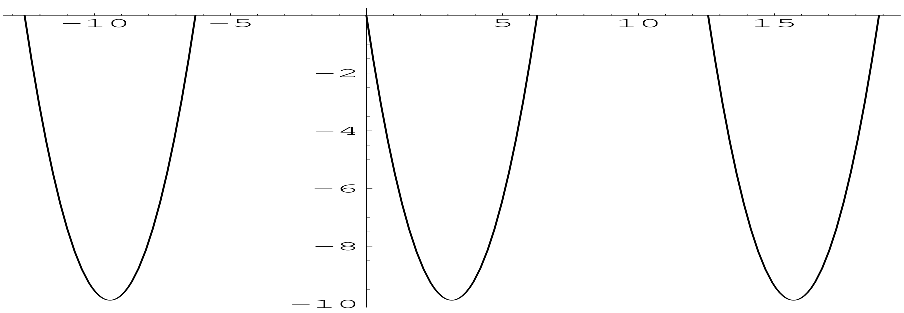

Bild 26 a): 4π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f

b) Mit den Bezeichnungen des Skriptes ist $T = 4\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi/T = 1/2$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} (x-\pi)^2 - \pi^2\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(x-\pi)^3}{3} - \pi^2 x \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi^3}{3} - 2\pi^3 + \frac{\pi^3}{3} \right) = -\frac{2\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned}
a_{k\geq 1} &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\cos(kx/2)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}((x-\pi)^2-\pi^2)\cos(kx/2)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2((x-\pi)^2-\pi^2)\sin(kx/2)}{k}+\frac{8(x-\pi)\cos(kx/2)}{k^2}\right. \\
&\qquad \left.-\frac{16\sin(kx/2)}{k^3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} \\
&= \frac{4((-1)^k+1)}{k^2} = \begin{cases} 0 & k \ \text{ungerade} \\ \dfrac{8}{k^2} & k \ \text{gerade}\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{k\geq 1} &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\sin(kx/2)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}((x-\pi)^2-\pi^2)\sin(kx/2)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-2((x-\pi)^2-\pi^2)\cos(kx/2)}{k}+\frac{8(x-\pi)\sin(kx/2)}{k^2}\right. \\
&\qquad \left.+\frac{16\cos(kx/2)}{k^3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} \\
&= \frac{8((-1)^k-1)}{k^3\pi} = \begin{cases} -\dfrac{16}{k^3\pi} & k \ \text{ungerade} \\ 0 & k \ \text{gerade}\end{cases}
\end{aligned}$$

Damit lautet die Fourier-Reihe

$$F_f(x) = -\frac{\pi^2}{3} + 8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}\cos(kx) - \frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin((2k-1)x/2)\,.$$

c)

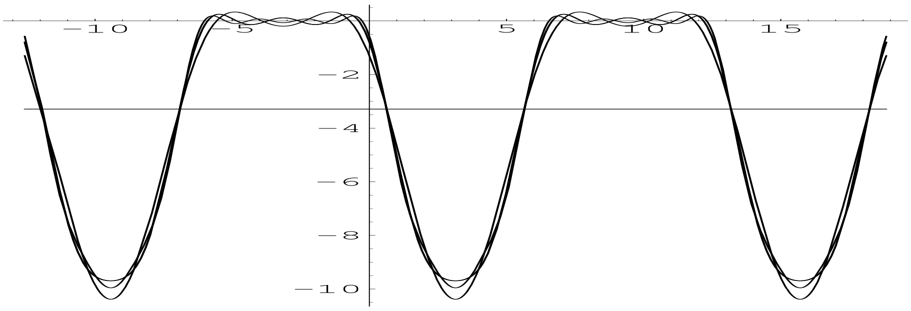

Bild 26 c): Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_3(x)$

d) Da f stückweise C^1-Funktion und stetig in $x = 0$ ist, konvergiert die Fourier-Reihe dort gegen f. Es gilt also

$$0 = f(0) = F_f(0) = -\frac{\pi^2}{3} + 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \,.$$

Aufgabe 27:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , \quad 0 \le x < 1\,, \\ 0 & , \quad 1 \le x < 4 \end{cases}$$

a) Man zeichne die 4-periodische Fortsetzung der Funktion f im Intervall $[-4.5, 5.5]$.

b) Man berechne die komplexe Fourier-Reihe der 4-periodischen Fortsetzung von f.

c) Man gebe die reellen Fourier-Koeffizienten dieser Fourier-Reihe an.

d) Man zeichne die Partialsumme $S_{40}(x)$ der berechneten Fourier-Reihe.

Lösung:

a)

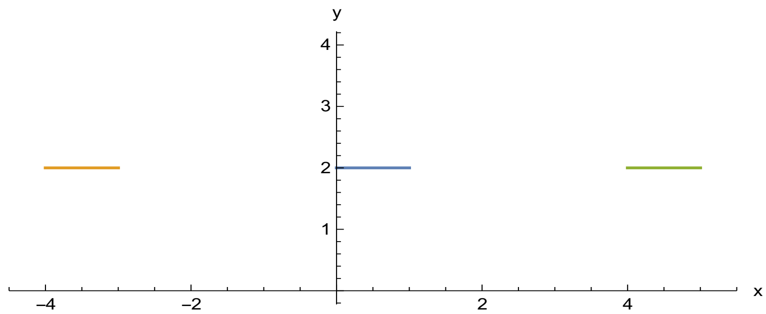

Bild 27 a): 4-periodischen Fortsetzung von f

b) Mit den Bezeichnungen des Skriptes ist $T = 4 \quad \Rightarrow \quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\gamma_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 2\,dx = \frac{1}{2}$$

Für $k \neq 0$

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-ik\omega x}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 2e^{-ik\pi x/2}\,dx = -\frac{1}{ik\pi}e^{-ik\pi x/2}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{ik\pi}\left(1 - e^{-ik\pi/2}\right) = \frac{i}{k\pi}\left(e^{-ik\pi/2} - 1\right) = \frac{i}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1 - i\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) = \gamma_k\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad F_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega x} = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k\neq 0\\ k=-\infty}}^{\infty} \frac{i}{k\pi}\left(e^{-ik\pi/2} - 1\right)e^{ik\pi x/2}$$

c) $a_0 = 2\gamma_0 = 1$

Für $k \neq 0$ gilt

$$\gamma_{-k} \;=\; -\frac{i}{k\pi}\left(e^{ik\pi/2} - 1\right) \;=\; -\frac{i}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1 + i\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) .$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
a_{k\geq 1} &= \gamma_k + \gamma_{-k} \\
&= \frac{i}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1 - i\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) - \frac{i}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1 + i\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
b_{k\geq 1} &= i(\gamma_k - \gamma_{-k}) \\
&= i\left(\frac{i}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1 - i\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) + \frac{i}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1 + i\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)\right) \\
&= -\frac{2}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1\right)
\end{aligned}$$

Wir bestätigen dieses Ergebnis, indem wir die reellen Koeffizienten zur Kontrolle direkt berechnen:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx = \frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2\,dx = 1$$

$$\begin{aligned}
a_{k\geq 1} &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int_0^1 2\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= \frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^1 \;=\; \frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \\
b_{k\geq 1} &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(k\omega x)\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int_0^1 2\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= -\frac{2}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^1 \;=\; -\frac{2}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1\right)
\end{aligned}$$

d) Mit dem Mathematica Befehl

```
Plot[1/2 + 2 Sum[( Sin[k*Pi/2]*Cos[k*Pi*x/2]
        - (Cos[k*Pi/2] - 1)*Sin[k*Pi*x/2] )/k,
    {k, 1, 40}]/Pi, {x, -6, 6}, PlotRange -> {-0.5, 2.5},
    AxesLabel -> {"x", "y"}]
```

erhält man

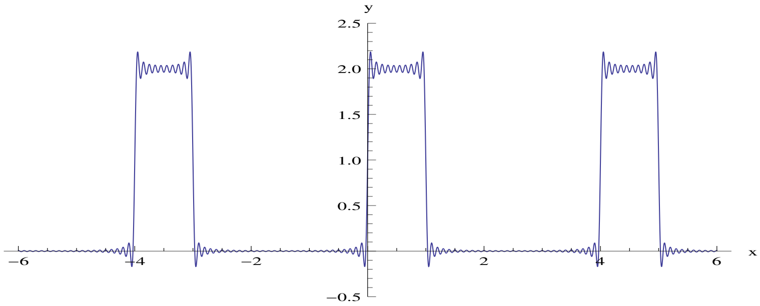

Bild 27 c): Partialsumme $S_{40}(x)$

Aufgabe 28:

Von der Funktion $\cos(x)$ erinnert man nur die Stützstellen

x_i	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
$\cos(x_i)$	0	1	0 .

a) Man gebe die Lagrange-Darstellung des Interpolationspolynoms $p_2(x)$ an.

b) Man berechne die Newtonsche Darstellung von $p_2(x)$ mit Hilfe des Schemas der dividierten Differenzen.

c) Man berechne $p_2(\pi/5)$ als Näherungswert für $\cos(\pi/5)$ sowie den Fehler $|\cos(\pi/5) - p_2(\pi/5)|$ und zeichne $\cos(x)$ und $p_2(x)$ im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$.

d) Nun erinnert man sich noch, dass $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ gilt. Mit dieser Information berechne man $p_3(x)$ und $p_3(\pi/5)$ als Näherungswert für $\cos(\pi/5)$ sowie den Fehler $|\cos(\pi/5) - p_3(\pi/5)|$ und zeichne $\cos(x)$ und $p_3(x)$ im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$.

Lösung:

a) Die Lagrange-Darstellung des Polynoms lautet:

$$p_2(x) = 0 \cdot \frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(-\frac{\pi}{2}-0\right)\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} + 1 \cdot \frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(0+\frac{\pi}{2}\right)\left(0-\frac{\pi}{2}\right)} + 0 \cdot \frac{(x-0)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$$

b) Aus dem Schema der dividierten Differenzen erhält man die Koeffizienten der Newtonschen Darstellung des Interpolationspolynoms:

$$\begin{array}{r|cccc} -\pi/2 & \boxed{0} & & \\ 0 & 1 & \boxed{2/\pi \approx 0.636620} & \\ \pi/2 & 0 & -2/\pi & \boxed{-4/\pi^2 \approx -0.405285} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad p_2(x) = \frac{2}{\pi}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{\pi^2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)x$$

c) $$p_2(\pi/5) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{5} = \frac{21}{25} = 0.84$$

$$|\cos(\pi/5) - p_2(\pi/5)| = \left|\frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{21}{25}\right| \approx 0.03098300563\,.$$

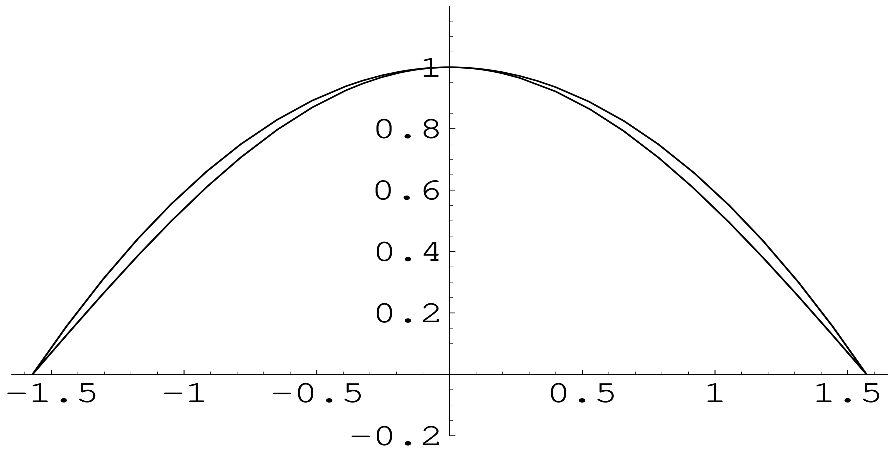

Bild 28.1 $\cos(x)$ und $p_2(x)$, $\pi/5 \approx 0.628$

d) An das Schema der dividierten Differenzen aus b) wird für p_3 nur eine Zeile angehängt

$-\pi/2$	$\boxed{0}$			
0	1	$\boxed{2/\pi}$		
$\pi/2$	0	$-2/\pi$	$\boxed{-4/\pi^2}$	
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}/\pi$	$(8-8\sqrt{2})/\pi^2$	$\boxed{(48-32\sqrt{2})/(3\pi^3) \approx 0.029512}$

$$\Rightarrow \quad p_3(x) = p_2(x) + \frac{48-32\sqrt{2}}{3\pi^3}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

Die Lagrange-Darstellung von p_2 kann nicht durch Anhängen eines Summanden in p_3 überführt werden. Es ändern sich dann alle Terme.

$$p_3(\pi/5) = p_2(\pi/5) + \frac{48-32\sqrt{2}}{3\pi^3}\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{5}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right) \approx 0.8015676759.$$

$$|\cos(\pi/5) - p_3(\pi/5)| \approx |0.8090169944 - 0.8015676759| \approx 0.007449318432\,.$$

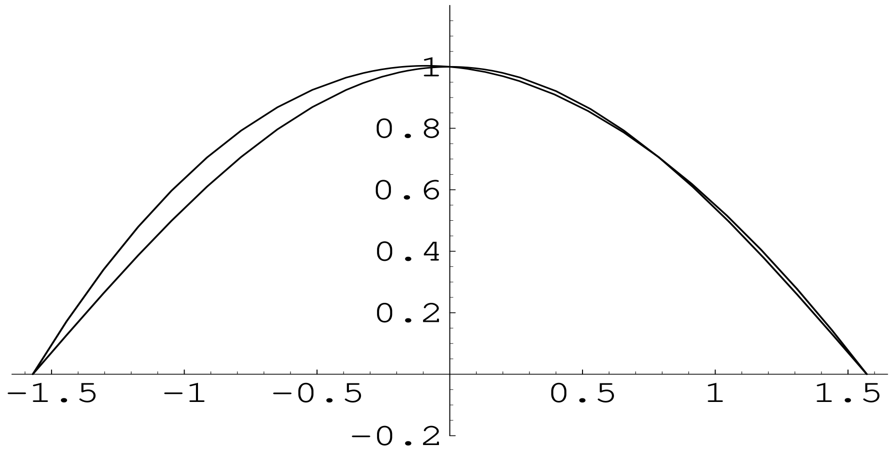

Bild 28.2 $\cos(x)$ und $p_3(x)$, $\pi/4 \approx 0.785$, $\pi/5 \approx 0.628$

Besprechungstermine: 7.7. - 9.7.21