ANALYSIS II

Woche 2 / J. Behrens

① Beweis:

$$p(\bar{\alpha}) = \sum_{j=0}^{n} a_j \overline{\alpha^j} = \sum_{j=0}^{n} \overline{a_j}\, \overline{\alpha^j} = \sum_{j=0}^{n} \overline{a_j \alpha^j} = \overline{\sum_{j=0}^{n} a_j \alpha^j} = \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0 \quad \boxtimes$$

② Beweis:

$$(x - z_j)(x - \overline{z_j}) = x^2 - x\overline{z_j} - x z_j + z_j \overline{z_j} = x^2 - (z_j + \overline{z_j})x + z_j \cdot \overline{z_j}$$

Erhalte: $\quad a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{j=0}^{2} a_j x^j$

mit $\quad a_2 = 1, \quad a_1 = -(z_j + \overline{z_j}) = -2\,\mathrm{Re}\, z_j, \quad a_0 = z_j \overline{z_j} = |z_j|^2 \quad \boxtimes$

③ Beweis:

- Falls $w_j \in \mathbb{C}$ Nullstelle, so auch $\overline{w_j}$. Daher findet man s Nullstellen $w_j, \overline{w_j}$ mit Vielfachheit n_j.
- Die restlichen r Nullstellen $z_k \in \mathbb{R}$ sind reell mit Vielfachheit m_k.
- Fundamentalsatz der Algebra:

$$p(x) = a_0 (x - z_1)^{m_1} (x - z_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x - z_r)^{m_r} \cdot$$
$$(x - w_1)^{n_1} (x - \overline{w_1})^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - w_s)^{n_s} (x - \overline{w_s})^{n_s}.$$

- Produkt aus Linearfaktoren $(x - w_j)$ und $(x - \overline{w_j})$:

$$x^2 + p_j x + q_j = (x - w_j)(x - \overline{w_j})$$

Damit folgt die Zerlegungsformel des Satzes.

- Die Vielfachheiten der reellen Nullstellen und der komplexen Nullstellenpaare erfüllt die Formel:

$$\sum_{k=1}^{r} m_k + 2\sum_{j=1}^{s} n_j = n. \qquad \boxtimes$$

(4) Beispiel: $\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{x^4+2}{x^2+2x-1} = s(x) + \frac{r(x)}{x^2+2x-1}$

Ansatz: $x^4 + 2 = s(x)\cdot(x^2+2x-1) + r(x)$

$$= (c_2x^2 + c_1x + c_0)(x^2+2x-1) + d_1x + d_0$$

Koeffizientenvergleich:

x^4 : $1 = c_2$

x^3 : $0 = 2c_2 + c_1$

x^2 : $0 = -c_2 + 2c_1 + c_0$

Es folgt: $s(x) = x^2 - 2x + 5$

Weiter: $d_1x + d_0 = r(x) = x^4 + 2 - (x^2-2x+5)(x^2+2x-1) = -12x+7$

Insgesamt: $\frac{x^4+2}{x^2+2x-1} = \underbrace{x^2-2x+5}_{s(x)} + \frac{\overbrace{-12x+7}^{r(x)}}{\underbrace{x^2+2x-1}_{q(x)}}$

⑤ Beispiel:

Betrachte: $$\frac{x^2+x-1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}$$ echt gebrochen rational.

Nullstellen: $$x^4-2x^3+2x^2+x^2-2x+1 = x^4-2x^2(x-1)+(x-1)^2$$
$$\Rightarrow \qquad = (x^2-x+1)^2$$

$\Rightarrow$ Der quadratische Faktor (x^2-x+1) hat keine reellen Nullst. sondern
$$w_1 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \;, \quad \overline{w_1} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
mit Vielfachheit 2.

Zerlegung: $$x^4-2x^3+3x^2-2x+1 = \left[(x-w_1)(x-\overline{w}_1)\right]^2 = (x^2-x+1)^2$$

Partialbruchzerlegung:
$$\frac{x^2+x-1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1} = \frac{b_{11}x+c_{11}}{x^2-x+1} + \frac{b_{12}x+c_{12}}{(x^2-x+1)^2}$$
mit eindeutigen $b_{11}, c_{11}, b_{12}, c_{12}$

Erhalte: $$x^2+x-1 = (b_{11}x+c_{11})(x^2-x+1)+b_{12}x+c_{12}$$
$$= b_{11}x^3+(c_{11}-b_{11})x^2+(b_{11}+b_{12}-c_{11})x+c_{11}+c_{12}.$$

Koeffizientenvergleich:
$$\begin{array}{lll} b_{11} & & : 0 \\ -b_{11}+c_{11} & & : 1 \\ b_{11}-c_{11}+b_{12} & & : 1 \\ c_{11} & +c_{12} & : -1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} b_{11}=0 \\ c_{11}=1 \\ b_{12}=2 \\ c_{12}=-2 \end{array}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^2+x-1}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1} = \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2x-2}{(x^2-x+1)^2}$$