Analysis II

Woche 03 / J. Behrens

① Beweis des Integrationskriteriums:

- Betrachte Zerlegung Z_K

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \text{des Intervalls } [a,b]$$

- $w_i := M_i - m_i \geq 0 \;,\; M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \;,\; m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

- Stetigkeit auf $[a,b]$ (gleichm. stetig)

Zu jedem $\varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : w_i < \varepsilon$ für $\Delta x_i < \delta$

- Für Zerlegung Z_K mit $|Z_K| < \delta$ folgt:

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \Delta x_j < \sum_j \varepsilon \Delta x_j = \varepsilon \sum_j \Delta x_j = \varepsilon (b-a)$$

- Da ε beliebig klein, folgt:

$$\lim_{K \to \infty} \sum_{j=1}^{K} w_j \Delta x_j = \lim_{K \to \infty} \left(\sum_j (M_i - m_i) \Delta x_j \right)$$

$$= \lim_{K \to \infty} \left(S_f(Z_K) - s_f(Z_K) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{K \to \infty} S_f(Z_K) = \lim_{K \to \infty} s_f(Z_K)$$

- Wegen der Ungleichungen $s_f(Z_1) \leq s_f(Z) \leq R(Z) \leq S_f(Z) \leq S_f(Z_2)$

$$\Rightarrow \lim_{K \to \infty} S_f(Z_K) = \lim_{K \to \infty} s_f(Z_K) = \lim_{K \to \infty} R(Z_K).$$

- Das gilt für jede Folge Z_k (mit $|Z_k| \to 0$, für $k \to \infty$), daher ist der gemeinsame Grenzwert gerade

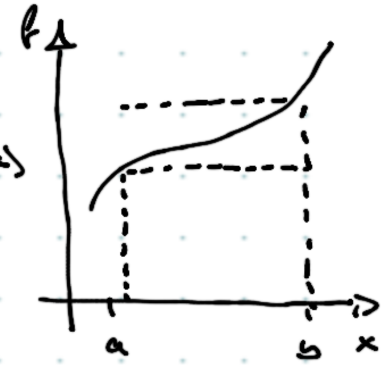
$$\lim_{k \to \infty} R(Z) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

- Es reicht: f stückweise stetig:
  Führe die gleiche Betrachtung auf jedem stetigen Stück durch. $\boxtimes$

Bemerkung ⚠ Stückweise Stetigkeit ist hinreichende aber nicht notwendige Bedingung

② Beweis Mittelwertsatz:

- Berechne $c = \int_a^b f(x)\,dx \,/\, (b-a)$.



- Es gilt: $\min\limits_{x \in [a,b]} f(x) \le c \le \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

- Zwischenwertsatz für stetige Fktn.:

  $\exists\, \xi \in [a,b] : \quad c = f(\xi)$

- ξ lässt sich immer aus $]a,b[$ wählen.

  Sei $\xi = a$, dann ist f entweder

  a) konstant $\Rightarrow$ man kann auch z.B. $\xi = \frac{a+b}{2}$ wählen

  b) nicht konst. $\Rightarrow$ wegen Stetigkeit $\exists\, \eta, \gamma \in]a,b[$:

  $$f(\eta) > f(a) > f(\gamma)$$

  $\Rightarrow$ zwischen η und γ ex. ξ so dass der Satz erfüllt ist.

$\boxtimes$

(3) Beweis: (erster Hauptsatz)

- Betrachte Differenzenquotient

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

- Mittelwertsatz: $\exists\ \xi \in\ ]x, x+h[\ :$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi)$$

- Grenzübergang $h \to 0$: $F'(x) = f(x)$

also ist F Stammfunktion von f. $\boxtimes$