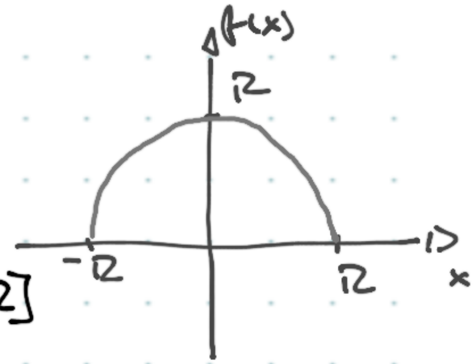
Analysis II

Woche 04 / J. Behrens



① Berechnung des Volumens eines Kegels

- Betrachte $f(x) = R\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}$, $x \in [-R, R]$
- $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$ einsetzen ergibt:

$$V = \pi \int_{-R}^{R} R^2\left(1-\left(\tfrac{x}{R}\right)^2\right)\,dx$$

$$= \pi R^2 \int_{-R}^{R} \underbrace{\left(1-\left(\tfrac{x}{R}\right)^2\right)}_{\text{Stammfkt: } x - \frac{x^3}{3R^2}}\,dx$$

$$\Rightarrow V = \pi R^2 \left(x - \frac{x^3}{3R^3}\right)\Big|_{-R}^{R} = \pi R^2 \left[R - \frac{R}{3} + R - \frac{R}{3}\right]$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$

(2) Beweisskizze Parameterintegrale:

- $F'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \displaystyle\int_c^d \dfrac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \, dy$

- Über die Def. des Integrals über Riemann-Summen überlegt man sich, dass der lim unter das Integral geschrieben werden kann:

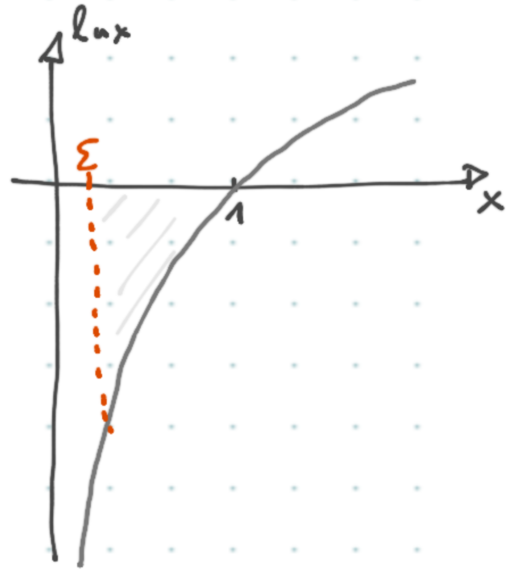
$$\Rightarrow \quad F'(x) = \int_c^d \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \, dy = \int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \, dy$$

<u>Beispiel:</u> Ableitung der Bessel-Fkt.

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) \, dt$$

$$J_n'(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin t - nt) \cdot \sin t \, dt$$

③ Beispiele uneigentlicher Integrale:



1. Beispiel: $\int_0^1 (-\ln x)\,dx$

$\ln x \to -\infty$ für $x \to 0$ ☹

- Allerdings $\int_\varepsilon^1 (-\ln x)\,dx$ für ε beliebig klein ist definiert

- Betrachte $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 (-\ln x)\,dx$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-x \ln x + x\right]_\varepsilon^1$$

$$= 1 + \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon\right]$$

- l'Hospital: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\ln \varepsilon - 1}{1/\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} (-\varepsilon) = 0$$

- Insgesamt $\Rightarrow \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 (-\ln x)\,dx = 1$

2. Beispiel: $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

Auch hier: $\frac{1}{x^2} \to \infty$ für $x \to 0$

Allerdings: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1 = -1 + \lim\limits_{\varepsilon \to \infty} = \infty$

3. Beispiel: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

Betrachte $\lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx$

Erhalte $\lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx = \lim\limits_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = \underbrace{\lim\limits_{a\to\infty} \frac{1}{a}}_{\to 0} - (-1) = 1$

④ Beispiel Cauchy-Kriterium.

a) $I_1 = \int_0^\infty \sin x\,dx$ divergiert

- Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < 2$. Zeige: Cauchy-Kriterium lässt sich nicht erfüllen.
- Es gibt $X > 0$, so dass $x_2 > x_1 > X$ und
  $\left|\int_{x_1}^{x_2} \sin x\,dx\right| < \varepsilon$
- Dann gäbe es auch $k \in \mathbb{N}$: $x_1 = 2k\pi > X$ und
  $x_2 = (2k+1)\pi > x_1 > X$

$\Rightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} \sin x\,dx\right| = -\cos x \Big|_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} = 2 > \varepsilon$ ↯

b) $I_2 = \int_0^\infty \sin x^2 \, dx$

- Zeige: Zu $\varepsilon > 0 \ \exists X > 0 : x_2 > x_1 > X : \left| \int_{x_1}^{x_2} \sin x^2 dx \right| < \varepsilon.$
- Substitution: $x^2 = t$: $\int_{x_1}^{x_2} \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{x_1^2}^{x_2^2} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \, dt$
- Partielle Integration: $\int_{x_1^2}^{x_2^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt = -\frac{\cos t}{\sqrt{t}} \Big|_{x_1^2}^{x_2^2} - \frac{1}{2} \int_{x_1^2}^{x_2^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t^3}} dt$
- Da $|\cos t| \leq 1$:

$$\left| \int_{x_1^2}^{x_2^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt \right| \leq \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{2} \int_{x_1^2}^{x_2^2} t^{-\frac{3}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{2}{x_1}$$

- Rücksubstitution:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \sin x^2 \, dx \right| \leq \frac{1}{x_1} < \varepsilon \quad \text{für alle } x_2 > x_1 > X = \frac{1}{\varepsilon}$$

- Man kann zeigen: $I_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.