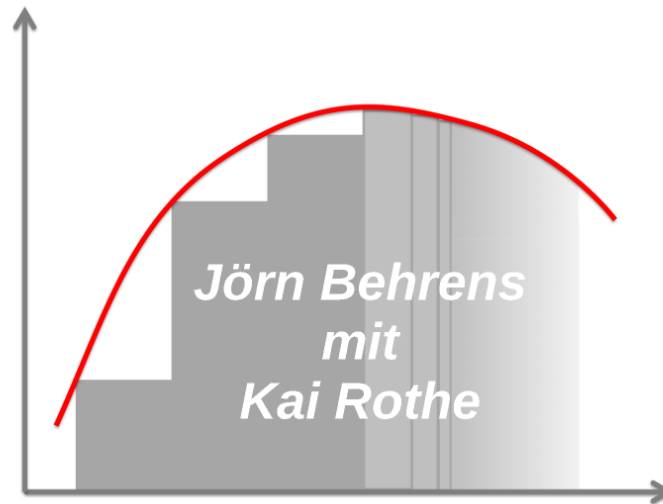


Analysis II



Rotationskörper, Parameterintegrale
und uneigentliche Integrale

Buch Kapitel 2.14-2.16

Erinnerung

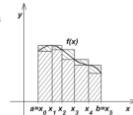
Obersumme/Untersumme

Sei $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ und $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.
 Dann bildet man über $[x_{i-1}, x_i]$ oben bzw. unten Rechteck
 mit Flächeninhalten $\Delta x_i \cdot M_i$ bzw. $\Delta x_i \cdot m_i$.
 Damit erhält man

$$S_f(Z) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \quad \text{Obersumme}$$

$$s_f(Z) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \quad \text{Untersumme}$$

von f bezüglich Z .



Riemannsche Summe

Sei $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebig im Intervall, $i = 1, \dots, n$, so gilt $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$.

$$R_f(Z) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

heißt **Riemannsche Summe** bezüglich der Zerlegung Z .

Definition: (Riemannsches Integral)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkte Funktion. Dann heißt f **Riemann-integrierbar**, falls $I_f = I_{f, \xi}$.

Der gemeinsame Grenzwert wird **bestimmtes Riemannsches Integral** von f über $[a, b]$ genannt:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

- a heißt **untere, b obere Integrationsgrenze**,
- $[a, b]$ heißt **Integrationsintervall**,
- x heißt **Integrationsvariable**,
- $f(x)$ heißt **Integrand**.

Satz: (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Ist F Stammfunktion einer stetigen Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall I .

Dann gilt für beliebige $a, b \in I$

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

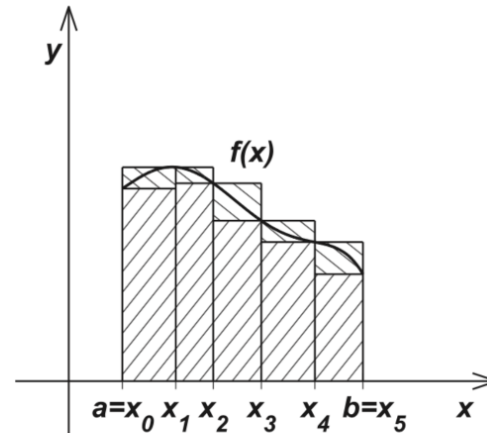
Obersumme/Untersumme:

Sei $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ und $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.
Dann bildet man über $[x_{i-1}, x_i]$ oberes bzw. unteres Rechteck
mit Flächeninhalten $\Delta x_i \cdot M_i$ bzw. $\Delta x_i \cdot m_i$.

Damit erhält man

$$S_f(Z) = \sum_{i=1:n} M_i \Delta x_i \quad \text{Obersumme,}$$

$$s_f(Z) = \sum_{i=1:n} m_i \Delta x_i \quad \text{Untersumme}$$



von f bezüglich Z .

Riemannsche Summe:

Sei $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebig im Intervall, $i = 1 : n$, so gilt $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$.

$$R(Z) = \sum_{i=1:n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

heißt **Riemannsche Summe** bezüglich der Zerlegung Z .

Defin

Sei f

$\int_f =$

Der g

genar

-
-
-
-

Definition: (Riemannsches Integral)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkte Funktion. Dann heißt f **Riemann-integrierbar**, falls $\underline{I}_f = \bar{I}_f$.

Der gemeinsame Grenzwert wird **bestimmtes Riemannsches Integral** von f über $[a, b]$ genannt:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

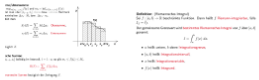
- a heißt untere, b obere **Integrationsgrenze**,
- $[a, b]$ heißt **Integrationsintervall**,
- x heißt **Integrationsvariable**,
- $f(x)$ heißt **Integrand**.

→
5 x

Satz: (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Ist F Stammfunktion einer stetigen Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall I .
Dann gilt für beliebige $a, b \in I$

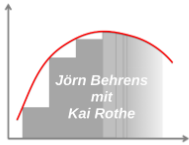
$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Erinnerung



$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

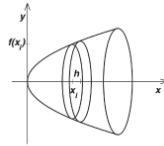
Analysis II



Rotationskörper, Parameterintegrale und uneigentliche Integrale
Buch Kapitel 2.14-2.16

Rotationskörper

Definition (Rotationskörper):
 Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ stetig. Rotiert der Funktionsgraph $\{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}$ um die x -Achse, so entsteht ein durch die Funktion f erzeugter **Rotationskörper**.



Idee Volumenberechnung:

- Unterteile $[a, b]$ in n Teilintervalle (**äquidistante Zerlegung**):
 $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1; n$, $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$.
- Berechne Volumen V_i der Scheibe/des Kegeltumpfes über $[x_{i-1}, x_i]$ näherungsweise:
 $V_i \approx f^2(\xi_i) \pi h$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
- Das Gesamtvolumen V :
 $V \approx \sum_{i=1}^n f^2(\xi_i) \pi h$.
- Dies ist die Riemannsche Summe von $\pi f^2(x)$ bezüglich der äquidistanten Zerlegung.
- Führe den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ (also $h \rightarrow 0$) durch.

Idee Oberflächenberechnung:

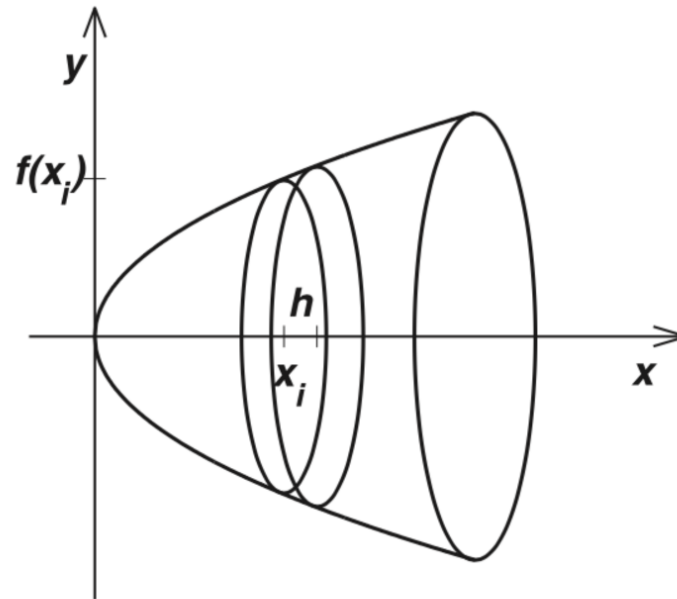
- Verwenden äquidistante Zerlegung (wie bei Volumen)
 $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1; n$, $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$.
- Berechne Oberfläche F_i des des Kegeltumpfes über $[x_{i-1}, x_i]$ näherungsweise:
 $F_i \approx 2\pi f(\xi_i) \Delta x_i$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
- Dabei ist Δx_i die Breite der Kegeltumpf-Fläche (Pythagoras):
 $\Delta x_i = \sqrt{h^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$.
- Die Gesamtoberfläche F :

$$F \approx \sum_{i=1}^n 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h}\right)^2} h$$
- Dies ist wieder eine Riemannsche Summe für $2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}$.
- Führe den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ (also $h \rightarrow 0$) durch.

eigentliche Integrale

Definition (Rotationskörper):

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, stetig. Rotiert der Funktionsgraph $\{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}$ um die x -Achse, so entsteht ein durch die Funktion f erzeugter **Rotationskörper**.



$\leq x \leq b\}$
per.

Idee Volumenberechnung:

- Unterteile $[a, b]$ in n Teilintervalle (äquidistante Zerlegung):

$$[x_{i-1}, x_i], \quad i = 1 : n, \quad x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

- Berechne Volumen V_i der Scheibe/des Kegelstumpfes über $[x_{i-1}, x_i]$ näherungsweise:

$$V_i \approx f^2(\xi_i)\pi h, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

- Das Gesamtvolumen V :

$$V \approx \sum_{k=1}^n f^2(\xi_k)\pi h.$$

- Dies ist die Riemannsche Summe von $\pi f^2(x)$ bezüglich der äquidistanten Zerlegung.
- Führe den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ (also $h \rightarrow 0$) durch.

$\leq x \leq b\}$
per.

Idee Volumenberechnung:

- Unterteile $[a, b]$ in n Teilintervalle (**äquidistante Zerlegung**):

$$[x_{i-1}, x_i], \quad i = 1 : n, \quad x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

- Berechne Volumen V_i der Scheibe/des Kegelstumpfes über $[x_{i-1}, x_i]$ näherungsweise:

$$V_i \approx f^2(\xi_i)\pi h, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

- Das Gesamtvolumen V :

$$V \approx \sum_{k=1}^n f^2(\xi_k)\pi h.$$

- Dies ist die Riemannsche Summe von $\pi f^2(x)$ bezüglich der äquidistanten Zerlegung.
- Führe den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ (also $h \rightarrow 0$) durch.

Volumen eines Rotationskörpers:

Das Volumen V eines von $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ erzeugten Rotationskörpers ist

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

1

Idee Oberflächenberechnung:

- Verwenden äquidistante Zerlegung (wie bei Volumen)

$$[x_{i-1}, x_i], \quad i = 1 : n, \quad x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

- Berechne Oberfläche F_i des des Kegelstumpfes über $[x_{i-1}, x_i]$ näherungsweise:

$$F_i \approx 2\pi f(\xi_i)\Delta s, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

- Dabei ist Δs die Breite der Kegelstumpf-Fläche (Pythagoras):

$$\Delta s = \sqrt{h^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

- Die Gesamtoberfläche F :

$$F \approx \sum_{k=1}^n 2\pi f(\xi_k) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1}))}{h}\right)^2} h.$$

- Dies ist wieder eine Riemannsche Summe für $2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}$.
- Führe den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ (also $h \rightarrow 0$) durch.

Idee Oberflächenberechnung:

- Verwenden äquidistante Zerlegung (wie bei Volumen)

$$[x_{i-1}, x_i], \quad i = 1 : n, \quad x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

- Berechne Oberfläche F_i des des Kegelstumpfes über $[x_{i-1}, x_i]$ näherungsweise:

$$F_i \approx 2\pi f(\xi_i) \Delta s, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

- Dabei ist Δs die Breite der Kegelstumpf-Fläche (Pythagoras):

$$\Delta s = \sqrt{h^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

- Die Gesamtoberfläche F :

$$F \approx \sum_{k=1}^n 2\pi f(\xi_k) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1}))}{h}\right)^2} h.$$

- Dies ist wieder eine Riemannsche Summe für $2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}$.
- Führe den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ (also $h \rightarrow 0$) durch.

Oberfläche eines Rotationskörpers:

Die Oberfläche F eines von $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ erzeugten Rotationskörpers ist

$$F = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Parameterintegrale

Beispiele/Motivation:

Die folgenden Funktionen sind als Integrale einer Funktion mit Parameter gegeben:

- Die **Gamma-Funktion**:

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$
- Die **Bessel-Funktionen**:

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t - nt) dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$
- Die **Laplace-Transformierte** einer Funktion $f(t)$:

$$F(x) := \int_0^{\infty} f(t) e^{-xt} dt.$$

Bemerkung: Die unabhängige Veränderliche x ist ein Parameter des jeweiligen Integrals!

Falls im Parameterintegral die Integrationsgrenzen vom Parameter x abhängen, gilt

Satz: (Leibniz-Regel)

Es gelten die Voraussetzungen vom Satz über die Diff. von Parameterintegralen. Außerdem seien $h(x)$ und $g(x)$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy + f(x,h(x))h'(x) - f(x,g(x))g'(x).$$

Bemerkungen:

- Integrationsgrenze ∞ wird nachfolgend noch behandelt.
- In vielen Fällen kann keine Stammfunktion angegeben werden.
- **Frage:** Gibt es dennoch Regeln für die Differentiation?

Satz: (Differentiation bestimmter Parameterintegrale)

Seien $[a, b]$ und $[c, d]$ abgeschlossene Intervalle und die Funktion $f(x, y)$ in $[a, b] \times [c, d]$

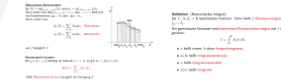
- stetig bezüglich des Parameters x und
- integrierbar bezüglich der Veränderlichen y .

Dann gilt für das Parameterintegral

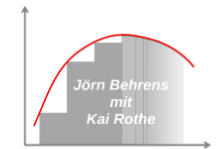
$$F(x) := \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b]$$

1. $F(x)$ ist in $[a, b]$ stetig.
2. Ist f zusätzlich auf $[a, b]$ nach dem Parameter x stetig differenzierbar, dann ist F' differenzierbar und hat die Ableitung

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy. \quad \text{②}$$



Analysis II



Rotationskörper, Parameterintegrale und uneigentliche Integrale
 Buch Kapitel 2.14-2.16

Uneigentliche Integrale

Beispiele/Motivation:

Die folgenden Funktionen sind als Integrale einer Funktion mit Parameter gegeben:

- Die **Gamma-Funktion**:

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-t} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

- Die **Bessel-Funktionen**:

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t - nt) dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Die **Laplace-Transformierte** einer Funktion $f(t)$:

$$F(x) := \int_0^{\infty} f(t) e^{-xt} dt.$$

Bemerkung: Die unabhängige Veränderliche x ist ein Parameter des jeweiligen Integrals!

Bemerkungen:

- Integrationsgrenze ∞ wird nachfolgend noch behandelt.
- In vielen Fällen kann keine Stammfunktion angegeben werden.
- **Frage:** Gibt es dennoch Regeln für die Differentiation?

Satz: (Differentiation bestimmter Parameterintegrale)

Seien $[a, b]$ und $[c, d]$ abgeschlossene Intervalle und die Funktion $f(x, y)$ in $[a, b] \times [c, d]$

- stetig bezüglich des Parameters x und
- integrierbar bezüglich der Veränderlichen y .

Dann gilt für das Parameterintegral

$$F(x) := \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b]$$

1. $F(x)$ ist in $[a, b]$ stetig,
2. ist f zusätzlich auf $[a, b]$ nach dem Parameter x stetig differenzierbar, dann ist F differenzierbar und hat die Ableitung

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy.$$

2

Falls im Parameterintegral die Integrationsgrenzen vom Parameter x abhängen, gilt

Satz: (Leibniz-Regel)

Es gelten die Voraussetzungen vom Satz über die Diff. von Parameterintegralen.

Außerdem seien $h(x)$ und $g(x)$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \\ &= \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy + f(x, h(x))h'(x) - f(x, g(x))g'(x). \end{aligned}$$

- Dies ist wieder eine Riemannsche Summe für $2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}$
- Führe den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ (also $h \rightarrow 0$) durch.

Oberfläche eines Rotationskörpers:
Die Oberfläche F eines von $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ erzeugten Rotation

$$F = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2} dx.$$

Uneigentliche Integrale

Motivation:
Bei den bestimmten Integralen $\int_a^b f(x) dx$ war vorausgesetzt:

- f beschränkt und
- a und b endlich.

Frage: Was passiert, wenn eine der Voraussetzungen nicht erfüllt ist? 3

Satz: (Cauchy-Kriterium)
Die Funktion $f(x)$ sei in $[a, \infty)$ über jedes abgeschlossene Teilintervall integrierbar.
Dann konvergiert das Integral

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

genau dann, wenn $\forall \epsilon > 0, \exists X > a$, so dass für alle x_1, x_2 mit $X < x_1 < x_2$ gilt:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| < \epsilon.$$

Bemerkung: analoge Kriterien gelten für die anderen Typen uneigentlicher Integrale.



Definition: (Uneigentliches Integral)

Die Funktion f sei auf dem rechts offenen Intervall $[a, b]$, mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und jedem Intervall $[a, c]$, $c < b$ stückweise stetig. Durch die Vereinbarungen:

a) $\int_a^{\infty} f(x) dx := \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx$

b) $\int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$

erweitern wir den Integralbegriff auf

- a) Integranden $f(x)$, die bei $x \nearrow b$ unbeschränkt sind,
- b) unbeschränkte Integrationsintervalle $[a, \infty]$.

Bemerkungen:

- Analog definiert man

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f(x) dx.$$

- Die so definierten Integrale heißen **uneigentliche Integrale**.
- Wenn die entsprechenden Grenzwerte existieren, so **konvergiert** das uneigentliche Integral.

Motivation:

Bei den bestimmten Integralen $\int_a^b f(x) dx$ war vorausgesetzt:

- f beschränkt und
- a und b endlich.

Frage: Was passiert, wenn eine der Voraussetzungen nicht erfüllt ist?

3

Definition: (Uneigentliches Integral)

Die Funktion f sei auf dem rechts offenen Intervall $[a, b[$, mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und jedem Intervall $[a, c]$, $c < b$ stückweise stetig. Durch die Vereinbarungen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_a^b f(x) dx &:= \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x) dx \\ \text{b) } \int_a^\infty f(x) dx &:= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx \end{aligned}$$

erweitern wir den Integralbegriff auf

- a) Integranden $f(x)$, die bei $x \nearrow b$ unbeschränkt sind,
- b) unbeschränkte Integrationsintervalle $[a, \infty[$.

Bemerkungen:

- Analog definiert man

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \searrow a} \int_c^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^b f(x) dx.$$

- Die so definierten Integrale heißen **uneigentliche Integrale**.
- Wenn die entsprechenden Grenzwerte existieren, so **konvergiert** das uneigentliche Integral.

Satz: (Cauchy-Kriterium)

Die Funktion $f(x)$ sei in $[a, \infty[$ über jedes abgeschlossene Teilintervall integrierbar.

Dann konvergiert das Integral

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

genau dann, wenn $\forall \epsilon > 0, \exists X > a$, so dass für alle x_1, x_2 mit $X < x_1 < x_2$ gilt:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| < \epsilon.$$

Bemerkung: analoge Kriterien gelten für die anderen Typen uneigentlicher Integrale.

Satz: (Cauchy-Kriterium)

Die Funktion $f(x)$ sei in $[a, \infty[$ über jedes abgeschlossene Teilintervall integrierbar.

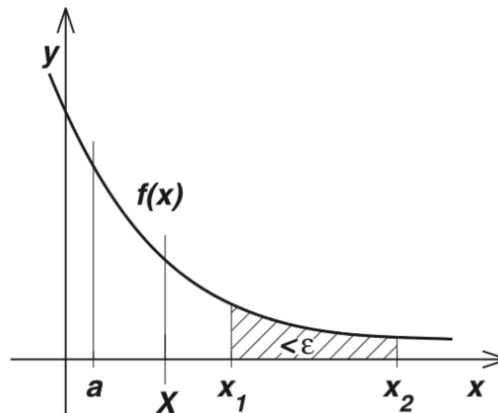
Dann konvergiert das Integral

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

genau dann, wenn $\forall \epsilon > 0, \exists X > a$, so dass für alle x_1, x_2 mit $X < x_1 < x_2$ gilt:

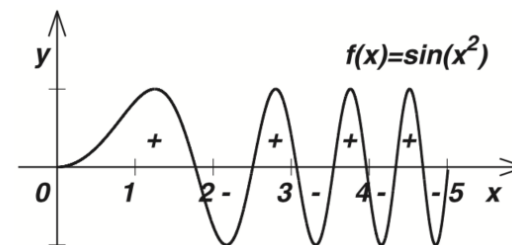
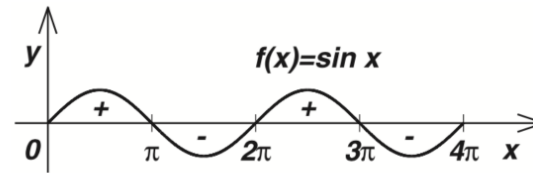
$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| < \epsilon.$$

Bemerkung: analoge Kriterien gelten für die anderen Typen uneigentlicher Integrale.



Beispiele: Betrachte

- $I_1 = \int_0^{\infty} \sin(x) dx$
- $I_2 = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$



4

Erinnerung

Parameterintegrale

- Beispiel:** $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$
- Die Ableitung: $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} x^3 \right) = x^2$
 - Die Ableitung: $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} x^3 + C \right) = x^2$
 - Die Ableitung: $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} x^3 + C \right) = x^2$

- Beispiele:**
- Integral von x^2 ist $\frac{1}{3} x^3 + C$
 - In allen Fällen kann man die Ableitung angeben werden
 - Frage: Was passiert, wenn die Ableitung nicht gegeben ist?

Wichtig: Die Ableitung des Integralums ist die Funktion plus einer Integrationskonstante C.

Wichtig: Die Ableitung des Integralums ist die Funktion plus einer Integrationskonstante C.

Analysis II



Rotationskörper, Parameterintegrale und uneigentliche Integrale

Rotationskörper

Definition: Rotationskörper
Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf $[a, b]$. Dann heißt der Körper, den man erhält, wenn man f um die x-Achse dreht, ein Rotationskörper.



- Wichtig:**
- Die Ableitung des Integralums ist die Funktion plus einer Integrationskonstante C.
 - Die Ableitung des Integralums ist die Funktion plus einer Integrationskonstante C.

Wichtig: Die Ableitung des Integralums ist die Funktion plus einer Integrationskonstante C.

- Die Ableitung des Integralums ist die Funktion plus einer Integrationskonstante C.
- Die Ableitung des Integralums ist die Funktion plus einer Integrationskonstante C.

Wichtig: Die Ableitung des Integralums ist die Funktion plus einer Integrationskonstante C.

Uneigentliche Integrale

- Beispiel:** $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = 1$
- Die Ableitung des Integralums ist die Funktion plus einer Integrationskonstante C.
 - Die Ableitung des Integralums ist die Funktion plus einer Integrationskonstante C.

Wichtig: Die Ableitung des Integralums ist die Funktion plus einer Integrationskonstante C.



- Beispiel:** $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$
- Die Ableitung des Integralums ist die Funktion plus einer Integrationskonstante C.
 - Die Ableitung des Integralums ist die Funktion plus einer Integrationskonstante C.