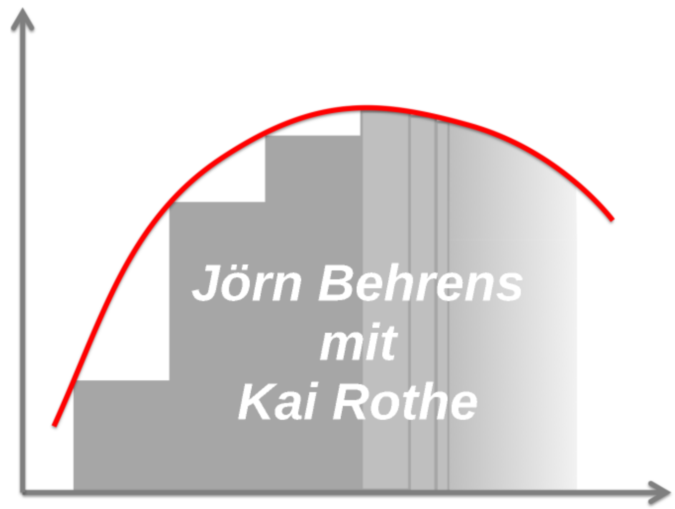
Analysis II



Nachträge zum Integral
Zahlenreihen

Buch Kapitel 2.16 und 3.1

Nachträge zur Integration

Erinnerung:

Definition: (Uneigentliches Integral)
Die Funktion f sei auf dem rechts offenen Intervall $[a,b[$, mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und jedem Intervall $[a,c]$, $c < b$ stückweise stetig. Durch die Vereinbarungen:

$$\text{a)} \quad \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)\,dx$$
$$\text{b)} \quad \int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,dx$$

erweitern wir den Integralbegriff auf

a) Integranden $f(x)$, die bei $x \nearrow b$ unbeschränkt sind,

b) unbeschränkte Integrationsintervalle $[a,\infty[$.

Satz: (Cauchy-Kriterium)
Die Funktion $f(x)$ sei in $[a,\infty[$ über jedes abgeschlossene Teilintervall integrierbar. Dann konvergiert das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

genau dann, wenn $\forall \epsilon > 0$, $\exists X > a$, so dass für alle x_1, x_2 mit $X < x_1 < x_2$ gilt:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| < \epsilon.$$

Bemerkung: analoge Kriterien gelten für die anderen Typen uneigentlicher Integrale.

Satz: (Potenzfunktion als Majorante)
Betrachte $I = \int_a^\infty f(x)\,dx$ mit $(a > 0)$, wobei $f(x)$ über jedes beschränkte Teilintervall $[a,\infty[$ integrierbar sei.

1. Ist für $x \ge c \ge a$ (d.h. ab einer gewissen Stelle $x = c$)
$$|f(x)| \le \frac{M}{x^\alpha}, \quad \text{mit } \alpha > 1, M > 0,$$
(d.h. $f(x) = O(x^{-\alpha})$ für $x \to \infty$), so ist I konvergent.
2. Ist ab einer Stelle $c \ge a$, d.h. für $x \ge c$ dagegen
$$f(x) \ge \frac{N}{x^\alpha}, \quad \text{mit } \alpha \le 1, N > 0,$$
dann ist I divergent.

Satz: (notwendige Konvergenzbedingung für Uneigentliches Integral)
Ist $f(x) \ge 0$ und monoton fallend, dann folgt aus der Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_a^\infty f(x)\,dx$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Satz: (Absolute Konvergenz)
Konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx,$$

dann konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx,$$

Satz: (Majorantenkriterium)
Ist $f(x) \ge 0$ und gilt $g(x) \ge f(x)$ auf $[a,\infty[$, so gilt:

1. konvergiert $\int_a^\infty g(x)\,dx$, dann konvergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$, und
2. divergiert $\int_a^\infty f(x)\,dx$, dann divergiert auch $\int_a^\infty g(x)\,dx$.

Im Fall 1. nennt man $g(x)$ die konvergente Majorante von $f(x)$ und
im Fall 2. nennt man $f(x)$ die divergente Minorante von $g(x)$.

Erinnerung:

Definition: (Uneigentliches Integral)
Die Funktion f sei auf dem rechts offenen Intervall $[a, b[$, mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und jedem Intervall $[a, c]$, $c < b$ stückweise stetig. Durch die Vereinbarungen:

$$\text{a)} \quad \int_a^b f(x)\ dx := \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)\ dx$$

$$\text{b)} \quad \int_a^\infty f(x)\ dx := \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\ dx$$

erweitern wir den Integralbegriff auf

a) Integranden $f(x)$, die bei $x \nearrow b$ unbeschränkt sind,

b) unbeschränkte Integrationsintervalle $[a, \infty[$.

Satz: (Cauchy-Kriterium)
Die Funktion $f(x)$ sei in $[a, \infty[$ über jedes abgeschlossene Teilintervall integrierbar. Dann konvergiert das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

genau dann, wenn $\forall \epsilon > 0$, $\exists X > a$, so dass für alle x_1, x_2 mit $X < x_1 < x_2$ gilt:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| < \epsilon.$$

Bemerkung: analoge Kriterien gelten für die anderen Typen uneigentlicher Integrale.

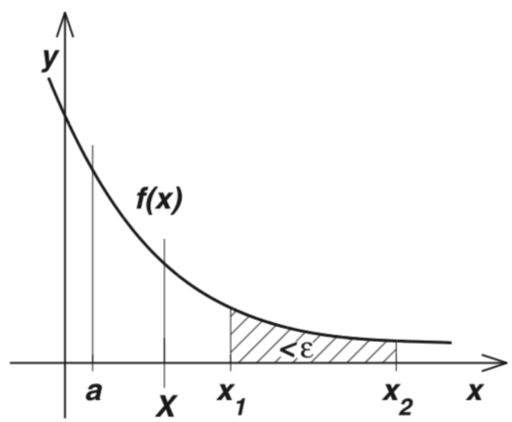
Satz: (Cauchy-Kriterium)
Die Funktion $f(x)$ sei in $[a, \infty[$ über jedes abgeschlossene Teilintervall integrierbar. Dann konvergiert das Integral

$$\int_a^\infty f(x)\ dx$$

genau dann, wenn $\forall \epsilon > 0$, $\exists X > a$, so dass für alle x_1, x_2 mit $X < x_1 < x_2$ gilt:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\ dx \right| < \epsilon.$$

Bemerkung: analoge Kriterien gelten für die anderen Typen uneigentlicher Integrale.



Satz: (notwendige Konvergenzbedingung für Uneigentliches Integral)
Ist $f(x) \geq 0$ und monoton fallend, dann folgt aus der Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_a^\infty f(x)\ dx$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Satz: (Majorantenkriterium)
Ist $f(x) \geq 0$ und gilt $g(x) \geq f(x)$ auf $[a, \infty[$, so gilt:

1. konvergiert $\int_a^\infty g(x)\; dx$, dann konvergiert auch $\int_a^\infty f(x)\; dx$, und
2. divergiert $\int_a^\infty f(x)\; dx$, dann divergiert auch $\int_a^\infty g(x)\; dx$.

Im Fall 1. nennt man $g(x)$ die konvergente Majorante von $f(x)$ und
im Fall 2. nennt man $f(x)$ die divergente Minorante von $g(x)$.

Satz: (Absolute Konvergenz)
Konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty |f(x)|\, dx,$$

dann konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x)\, dx,$$

Satz: (Potenzfunktion als Majorante)
Betrachte $I = \int_a^\infty f(x)\,dx$ mit $(a > 0)$, wobei $f(x)$ über jedes beschränkte Teilintervall $[a, \infty[$ integrierbar sei.

1. Ist für $x \geq c \geq y$ (d.h. ab einer gewissen Stelle $x = c$)

   $$|f(x)| \leq \frac{M}{x^\alpha}, \quad \text{mit} \alpha > 1, M > 0,$$

   (d.h. $f(x) = O(x^{-\alpha})$ für $x \to \infty$, so ist I konvergent.

2. Ist ab einer Stelle $c \geq a$, d.h. für $x \geq c$ dagegen

   $$f(x) \geq \frac{N}{x^\alpha}, \quad \text{mit} \alpha \leq 1, N > 0,$$

   dann ist I divergent.

gral)
des uneigentlichen

Unendliche Reihen

Definition: (Unendliche Reihe)
Betrachte Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$. Addiere die Elemente nacheinander auf und erhalte neue Zahlenfolge (s_n):

$$s_0 = a_0,\ s_1 = a_0 + a_1,\ s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ldots$$

(s_n) heißt unendliche Reihe (oder kurz Reihe). Schreibe auch

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Die Glieder a_n der Zahlenfolge (a_n) heißen auch Glieder der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Bemerkungen und Begriffe:

- Summen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ heißen Teil- oder Partialsummen der Reihe.
- Ist $p \in \mathbb{Z}$, so ist $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ als Teilsummenfolge (s'_n) zu verstehen:

  $$s'_0 = a_p,\ s'_1 = a_p + a_{p+1}, \ldots, s'_n = \sum_{k=0}^{n} a_{p+k}.$$

  Anders herum: setzt man $b_k = a_{k+p}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$, so gilt

  $$\sum_{k=p}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k,$$

  die Reihe mit Anfangsindex p lässt sich also auf eine Reihe mit Anfangsindex 0 zurückführen.
- Aus einer unendlichen Reihe kann man eine beliebige (endliche) Summe "herausziehen":

  $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + \cdots a_{p-1} + \sum_{k=p}^{\infty} a_k, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Definition: (Konvergenz einer Reihe)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt genau dann konvergent, wenn die Folge (s_n) ihrer Partialsummen konvergiert. Ist s der Grenzwert dieser Folge ($s = \lim_{n\to\infty} s_n$), so schreibe

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

s heißt Grenzwert oder Summe der Reihe. Konvergiert die Reihe nicht, so heißt sie divergent.

1

Kriterium: (Notwendiges Konvergenzkriterium für Reihen)
Bei einer konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bilden die Glieder eine Nullfolge:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

2

Satz: (Operationen mit konvergenten Reihen)
Die folgenden Operationen sind gliedweise mit konvergenten Reihen zulässig:

- Summe/Differenz:

  $$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

- Multiplikation mit Skalar:

  $$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Satz: (Mono
Eine Reihe $\sum$
wenn die Folg

Definition: (Unendliche Reihe)
Betrachte Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$. Addiere die Elemente nacheinander auf und erhalte neue Zahlenfolge (s_n):

$$s_0 = a_0,\ s_1 = a_0 + a_1,\ s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ldots$$

(s_n) heißt unendliche Reihe (oder kurz Reihe). Schreibe auch

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Die Glieder a_n der Zahlenfolge (a_n) heißen auch Glieder der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Bemerkungen und Begriffe:

- Summen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ heißen Teil- oder Partialsummen der Reihe.
- Ist $p \in \mathbb{Z}$, so ist $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ als Teilsummenfolge (s'_n) zu verstehen:

$$s'_0 = a_p, \ s'_1 = a_p + a_{p+1}, \ldots, s'_n = \sum_{k=0}^{n} a_{p+k}.$$

Anders herum: setzt man $b_k = a_{k+p}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$, so gilt

$$\sum_{k=p}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k,$$

die Reihe mit Anfangsindex p lässt sich also auf eine Reihe mit Anfangsindex 0 zurückführen.

- Aus einer unendlichen Reihe kann man eine beliebige (endliche) Summe "herausziehen":

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + \cdots a_{p-1} + \sum_{k=p}^{\infty} a_k, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Definition: (Konvergenz einer Reihe)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt genau dann konvergent, wenn die Folge (s_n) ihrer Partialsummen konvergiert. Ist s der Grenzwert dieser Folge ($s = \lim_{n\to\infty} s_n$), so schreibe

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

s heißt Grenzwert oder Summe der Reihe. Konvergiert die Reihe nicht, so heißt sie divergent.

1

Satz: (Operationen mit konvergenten Reihen)
Die folgenden Operationen sind gliedweise mit konvergenten Reihen zulässig:

- Summe/Differenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

- Multiplikation mit Skalar:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Kriterium: (Notwendiges Konvergenzkriterium für Reihen)
Bei einer konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bilden die Glieder eine Nullfolge:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

2

Konvergenzkriterien

Satz: (Monotoniekriterium)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0$ konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen beschränkt ist.

Satz: (Chauchy-Kriterium)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n > m > n_0(\epsilon)$ stets

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \epsilon.$$

Satz: (Leibniz-Kriterium)
Eine alternierende Reihe

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

mit $a_k > 0$ konvergiert, wenn die Folge (a_k) monoton fallend ist und gegen Null strebt:

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0.$$

Satz: (Monotoniekriterium)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0$ konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen beschränkt ist.

Satz: (Monotoniekriterium)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0$ konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen beschränkt ist.

Beweis: Folgt aus Satz über Konvergenz beschränkter und monotoner Folgen, da $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ monoton steigt.

Satz: (Chauchy-Kriterium)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn gilt:
, Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n > m > n_0(\epsilon)$ stets

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \epsilon.$$

,

Satz: (Chauchy-Kriterium)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n > m > n_0(\epsilon)$ stets

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \epsilon.$$

Beweis: Folgt aus der Beobachtung

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| = |s_m - s_n| < \epsilon.$$

Dies ist die Cauchy-Folgenbedingung für die Partialsumme (s_n).

Satz: (Leibniz-Kriterium)
Eine alternierende Reihe

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

mit $a_k > 0$ konvergiert, wenn die Folge (a_k) monoton fallend ist und gegen Null strebt:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Absolute Konvergenz

Definition: (Absolut konvergente Reihe)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Bemerkung: Wenn eine Reihe absolut konvergiert,
dann konvergiert sie auch.
Dies folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m|$$

und dem Cauchy-Kriterium.

Satz: (Umordnung absolut konvergenter Reihen)
Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe mit Grenzwert s,
so konvergiert jede Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k}$, die durch Umordnung ihrer Glieder entsteht,
mit Grenzwert s.

Satz: (Multiplikationssatz)
Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen, so gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0,j=0}^{\infty} a_k b_j,$$

wobei das Indexpaar (k, j) alle Paare

$$\begin{array}{cccc} (0,0) & (0,1) & (0,2) & \cdots \\ (1,0) & (1,1) & (1,2) & \cdots \\ (2,0) & (2,1) & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \end{array}$$

in irgendeiner Weise durchläuft.

Definition: (Absolut konvergente Reihe)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Bemerkung: Wenn eine Reihe absolut konvergiert,
dann konvergiert sie auch.
Dies folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m|$$

und dem Cauchy-Kriterium.

Satz:
Ist $\sum_{k}$
so kon
mit Gr

Definition: (Absolut konvergente Reihe)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Bemerkung: Wenn eine Reihe absolut konvergiert, dann konvergiert sie auch.
Dies folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m|$$

und dem Cauchy-Kriterium.

Bemerkung: Absolut konvergente Reihen sind der Normalfall!
Reihen, die konvergieren, aber nicht absolut konvergieren, heißen bedingt konvergent.

Satz:
Ist $\sum_k$
so kon
mit Gr

Satz: (Umordnung absolut konvergenter Reihen)
Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe mit Grenzwert s,
so konvergiert jede Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k}$, die durch Umordnung ihrer Glieder entsteht,
mit Grenzwert s.

Satz: (Multiplikationssatz)
Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen, so gilt:

$$(\sum_{k=0}^{\infty} a_k) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} b_k) = \sum_{k=0,j=0}^{\infty} a_k b_j,$$

wobei das Indexpaar (k, j) alle Paare

$$\begin{array}{cccc} (0,0) & (0,1) & (0,2) & \cdots \\ (1,0) & (1,1) & (1,2) & \cdots \\ (2,0) & (2,1) & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \end{array}$$

in irgendeiner Weise durchläuft.

Satz: (Multiplikationssatz)
Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen, so gilt:

$$(\sum_{k=0}^{\infty} a_k) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} b_k) = \sum_{k=0,j=0}^{\infty} a_k b_j,$$

wobei das Indexpaar (k, j) alle Paare

$$\begin{array}{cccc}
(0,0) & (0,1) & (0,2) & \cdots \\
(1,0) & (1,1) & (1,2) & \cdots \\
(2,0) & (2,1) & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \ddots &
\end{array}$$

in irgendeiner Weise durchläuft.

Bemerkung: (Cauchy-Produkt)
Wählt man die Reihenfolge der Indexpaare wiefolgt:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(0,0) & & (0,1) & & (0,2) & & (0,3) & \cdots \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \cdots & \\
(1,0) & & (1,1) & & (1,2) & \cdots & & \\
 & \nearrow & & \nearrow & \cdots & & & \\
(2,0) & & (2,1) & \cdots & & & & \\
 & \nearrow & \cdots & & & & & \\
(3,0) & \cdots & & & & & & \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

so folgt

$$(\sum_{k=0}^{\infty} a_k) \cdot (\sum_{j=0}^{\infty} b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \quad \text{mit} \quad c_j = \sum_{k=0}^{j} a_{j-k} b_k.$$

Das Produkt heißt auch Cauchy-Produkt.

eder entsteht,

Kriterien für absolute Konvergenz

Satz: (Majoranten-Kriterium)
Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und gilt $|b_k| \leq |a_k|$ für alle $k > k_0 \in \mathbb{N}$, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent.

$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ heißt eine Majorante von $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Satz: (Vergleichs-Kriterien)
Gegeben seien die Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ mit } a_k > 0 \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ mit } b_k > 0.$$

- Gibt es $k_0 \geq 0$, so dass $a_k \leq b_k$ für alle $k \geq k_0$, so folgt:
  1. Konvergente Majorante: Ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent mit
  $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$
  2. Divergente Minorante: Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent, dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$
- Existiert ein endlicher Grenzwert
  $$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} =: c \neq 0,$$
  so sind die Reihen entweder beide konvergent oder beide divergent.

Satz: (Quotienten- und Wurzel-Kriterium)
Für eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gelte:

- $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$ und es existiert $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = d$, oder
- es existiert $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = d$,

so ist die Reihe absolut konvergent, falls $d < 1$, und divergent, falls $d > 1$.

Satz: (Quotienten-Kriterium)
Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, wenn es k_0 und $0 < c < 1$ gibt, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt:

$$a_k \neq 0 \quad \text{und} \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq c.$$

Ist andererseits für $k \geq k_0$

$$a_k \neq 0 \quad \text{und} \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1,$$

So ist die Reihe divergent.

Satz: (Wurzel-Kriterium)
Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, wenn es $0 < c < 1$ gibt, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt:

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq c.$$

Ist andererseits für $k \geq k_0$

$$\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1,$$

So ist die Reihe divergent.

Satz: (
Sei f e
grierba

gleiche

Satz: (Majoranten-Kriterium)
Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und gilt $|b_k| \leq |a_k|$ für alle $k > k_0 \in \mathbb{N}$, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent.

$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ heißt eine Majorante von $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Satz: (Majoranten-Kriterium)
Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und gilt $|b_k| \leq |a_k|$ für alle $k > k_0 \in \mathbb{N}$, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent.

$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ heißt eine Majorante von $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Beweis: Folgt aus

$$\sum_{k=k_0}^{n} |b_k| \leq \sum_{k=k_0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$$

mit dem Monotoniekriterium.

Satz: (Vergleichs-Kriterien)
Gegeben seien die Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ mit } a_k > 0 \text{ und} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ mit } b_k > 0.$$

- Gibt es $k_0 \geq 0$, so dass $a_k \leq b_k$ für alle $k \geq k_0$, so folgt:
  1. Konvergente Majorante: Ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent mit
  $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$
  2. Divergente Minorante: Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent, dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$
- Existiert ein endlicher Grenzwert
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} =: c \neq 0,$$
so sind die Reihen entweder beide konvergent oder beide divergent.

Satz: (Quotienten-Kriterium)
Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, wenn es k_0 und $0 < c < 1$ gibt, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt:

$$a_k \neq 0 \quad \text{und} \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq c.$$

Ist andererseits für $k \geq k_0$

$$a_k \neq 0 \quad \text{und} \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1,$$

So ist die Reihe divergent.

Satz: (Wurzel-Kriterium)
Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, wenn es $0 < c < 1$ gibt, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt:

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq c.$$

Ist andererseits für $k \geq k_0$

$$\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1,$$

So ist die Reihe divergent.

Satz: (Quotienten- und Wurzel-Kriterium)
Für eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gelte:

- $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$ und es existiert $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = d$, oder
- es existiert $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = d$,

so ist die Reihe absolut konvergent, falls $d < 1$, und divergent, falls $d > 1$.

Integral-Kriterium

Satz: (Integral-Kriterium für Reihen)
Sei f eine Funktion, die auf jedem abgeschlossenen Intervall $[m, p] \subset [m, \infty[$ integrierbar ist. Ist f auf $[m, \infty[$, $m \in \mathbb{Z}$ positiv und monoton fallend, so haben

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) \quad \text{und} \quad \int_{m}^{\infty} f(x)\, dx$$

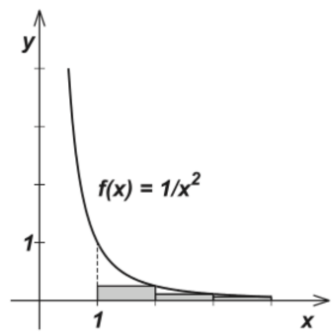
gleiches Konvergenzverhalten.

Integral-Kriterium

Satz: (Integral-Kriterium für Reihen)
Sei f eine Funktion, die auf jedem abgeschlossenen Intervall $[m, p] \subset [m, \infty[$ integrierbar ist. Ist f auf $[m, \infty[$, $m \in \mathbb{Z}$ positiv und monoton fallend, so haben

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) \quad \text{und} \quad \int_m^{\infty} f(x)\, dx$$

gleiches Konvergenzverhalten.




Nachträge zur Integration
Unendliche Reihen
Konvergenzkriterien
Absolute Konvergenz
Kriterien für absolute Konvergenz
Integral-Kriterium
Analysis II