# ANALYSIS II

Woche 09 / J. Behrens

① Frage: Existiert die Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right] \quad ?$$

<u>Idee:</u> Nimm an, die Darstellung existiere und sei glm.-konvergent

<u>Neue Frage:</u> Welche Bedingungen erfüllen dann die $a_n, b_n$, um die Existenz zu sichern?

<u>Koeffizientenbestimmung:</u>

Multipliziere mit $\sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}$ fest, integriere in $[-\pi, \pi]$

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\,dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\,dx \; + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx)\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx)\,dx \right] \end{aligned}} \quad (*)$$

<u>Es gilt:</u>

$$\cos(nx)\sin(kx) = \frac{1}{2}\left\{ \sin[(n+k)x] - \sin[(n-k)x] \right\}$$

$$\sin(nx)\sin(kx) = \frac{1}{2}\left\{ \cos[(n+k)x] - \cos[(n-k)x] \right\}$$

$$\cos(nx)\cos(kx) = \frac{1}{2}\left\{ \cos[(n+k)x] + \cos[(n-k)x] \right\}$$

$$k,n\in\mathbb{N} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(kx)\,dx &= 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,\sin(kx)\,dx &= \delta_{nk}\,\pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,\cos(kx)\,dx &= \delta_{nk}\,\pi \end{aligned}\right\}$$ Orthogonalitätseigenschaft des trigonometrischen Funktionensystems.

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } n=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Einsetzen in (*) ergibt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\,dx = b_k\,\pi$$

Analog erhält man bei Multiplikation mit $\cos(kx)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \begin{cases} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) = a_k\,\pi & \text{für } k\in\mathbb{N} \\ \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = a_0\,\pi & \text{für } k=0 \end{cases}$$

Auflösen nach $a_k$ bzw. $b_k$:

$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx & k&=0,1,2,\ldots \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx & k&=1,2,3\ldots \end{aligned}}$$