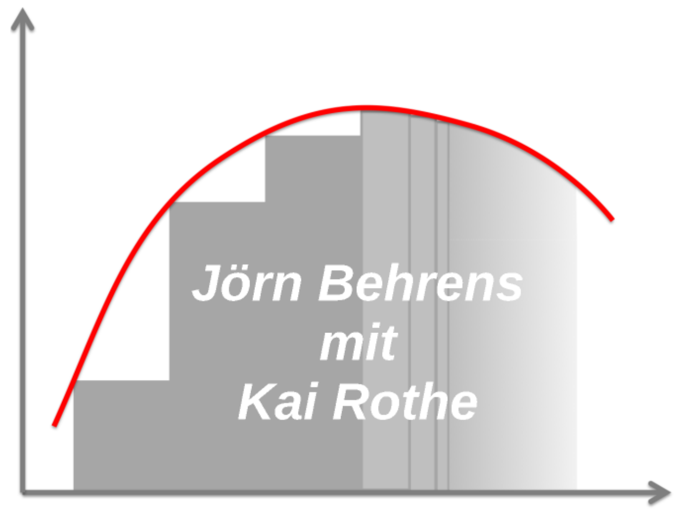
Analysis II



Numerische Integration und Interpolation

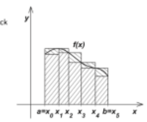
Buch Kapitel 2.17-2.18

Erinnerung

Obersumme/Untersumme:
Sei $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ und $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$.
Dann bildet man über $[x_{i-1}, x_i]$ oberes bzw. unteres Rechteck mit Flächeninhalten $\Delta x_i \cdot M_i$ bzw. $\Delta x_i \cdot m_i$.
Damit erhält man

$$S_f(Z) = \sum_{i=1:n} M_i \Delta x_i \quad \text{Obersumme,}$$
$$s_f(Z) = \sum_{i=1:n} m_i \Delta x_i \quad \text{Untersumme}$$

von f bezüglich Z.



Riemannsche Summe:
Sei $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebig im Intervall, $i = 1 : n$, so gilt $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$.

$$R(Z) = \sum_{i=1:n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

heißt Riemannsche Summe bezüglich der Zerlegung Z.

Oberintegral/Oberintegral:
Für feiner werdende Zerlegungen Z ist klar, dass die Obersumme kleiner und die Untersumme größer wird.
Daher

$$\bar{I}_f = \inf_Z S_f(Z), \quad \text{Oberintegral}$$
$$\underline{I}_f = \sup_Z s_f(Z), \quad \text{Unterintegral}$$

von f bezüglich Z.

Satz: (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Ist F Stammfunktion einer stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I.
Dann gilt für beliebige $a, b \in I$

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Definition: (Riemannsches Integral)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion. Dann heißt f Riemann-integrierbar, falls $\underline{I}_f = \bar{I}_f$.
Der gemeinsame Grenzwert wird bestimmtes Riemannsches Integral von f über $[a, b]$ genannt:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

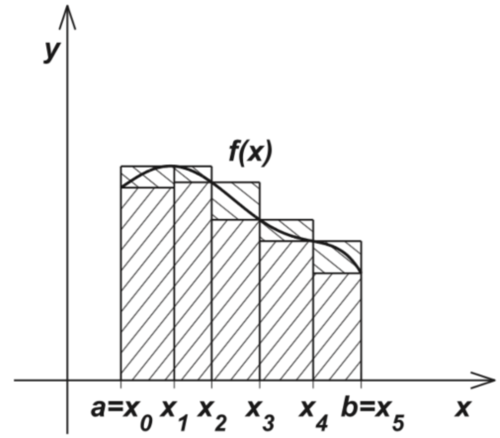
- a heißt untere, b obere Integrationsgrenze,
- $[a, b]$ heißt Integrationsintervall,
- x heißt Integrationsvariable,
- $f(x)$ heißt Integrand.

Obersumme/Untersumme:
Sei $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ und $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.
Dann bildet man über $[x_{i-1}, x_i]$ oberes bzw. unteres Rechteck mit Flächeninhalten $\Delta x_i \cdot M_i$ bzw. $\Delta x_i \cdot m_i$.
Damit erhält man

$$S_f(Z) = \sum_{i=1:n} M_i \Delta x_i \quad \text{Obersumme,}$$

$$s_f(Z) = \sum_{i=1:n} m_i \Delta x_i \quad \text{Untersumme}$$

von f bezüglich Z.



Riemannsche Summe:
Sei $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebig im Intervall, $i = 1 : n$, so gilt $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$.

$$R(Z) = \sum_{i=1:n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

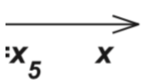
heißt Riemannsche Summe bezüglich der Zerlegung Z.

Oberint
Für feine
Untersur
Daher

von f be

Oberintegral/Oberintegral:
Für feiner werdende Zerlegungen Z ist klar, dass die Obersumme kleiner und die Untersumme größer wird.
Daher

$$\bar{I}_f = \inf_Z S_f(Z), \quad \text{Oberintegral}$$
$$\underline{I}_f = \sup_Z s_f(Z), \quad \text{Unterintegral}$$



von f bezüglich Z.

g)
n Intervall I.

Definition: (Riemannsches Integral)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion. Dann heißt f Riemann-integrierbar, falls $\underline{I}_f = \bar{I}_f$.

Der gemeinsame Grenzwert wird bestimmtes Riemannsches Integral von f über $[a, b]$ genannt:

$$I = \int_a^b f(x)\ dx.$$

- a heißt untere, b obere Integrationsgrenze,
- $[a, b]$ heißt Integrationsintervall,
- x heißt Integrationsvariable,
- $f(x)$ heißt Integrand.

Satz: (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Ist F Stammfunktion einer stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I.
Dann gilt für beliebige $a, b \in I$

$$\int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Definition:
Sei $f : [a, b$
$\underline{I}_f = \bar{I}_f$.

Der gemein
genannt:

- a hei
- $[a, b]$
- x hei
- $f(x)$

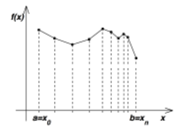
Numerische Integration
Trapezregel

Beobachtung:
Bisheriger Ansatz zur Lösung des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$:

- Finde Stammfunktion $F(x)$.
- Berechne $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Fragen:

- Was tun, wenn $F(x)$ unbekannt ist?
- Was tun, wenn $F(a)$ bzw. $F(b)$ nicht einfach ausgewertet werden können?
- Was tun, wenn f nicht als Funktion gegeben ist?



Berechnungsidee:
Flächeninhalt jedes Abschnittes (Höhe × Breite):

$$\frac{y_{i+1} + y_i}{2}(x_{i+1} - x_i)$$

Trapezregel:
Sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ und seien $y_i = f(x_i)$, dann kann das Integral angenähert werden:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2}(x_i - x_{i-1})$$

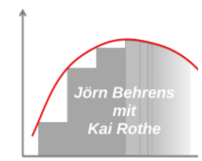
1

Trapezregel für äquidistante Teilung:
Ist $[a, b]$ durch $x_k = a + kh$ mit $h = \frac{b-a}{n}$ und $k = 0, 1, \ldots, n$ äquidistant geteilt, so erhält man die *summierte Trapezregel* in der Form

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)$$

Erinnerung

Analysis



Numerische Integration und Int

Buch Kapitel 2.17-2.18

Beobachtung:
Bisheriger Ansatz zur Lösung des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$:

- Finde Stammfunktion $F(x)$.
- Berechne $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

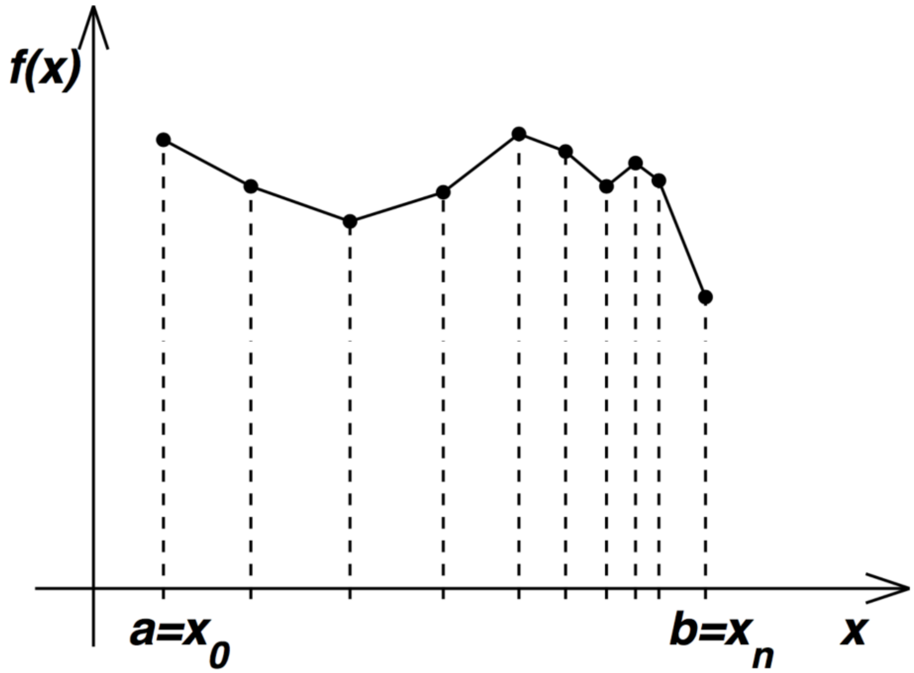
Fragen:

- Was tun, wenn $F(x)$ unbekannt ist?
- Was tun, wenn $F(a)$ bzw. $F(b)$ nicht einfach ausgewertet werden können?
- Was tun, wenn f nicht als Funktion gegeben ist?

Beispiel:
f könnte in Form diskreter Messwerte gegeben sein:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

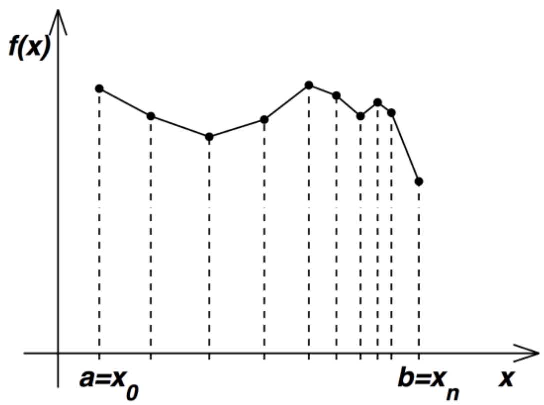
Idee: numerische Berechnung



Berechnungsidee:
Flächeninhalt jedes Abschnittes (Höhe × Breite):

$$\frac{y_{i+1} + y_i}{2}(x_{i+1} - x_i)$$

ı können?



Berechnungsidee:
Flächeninhalt jedes Abschnittes (Höhe $\times$ Breite):

$$\frac{y_{i+1} + y_i}{2}(x_{i+1} - x_i)$$

Trapezregel:
Sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ und seien $y_i = f(x_i)$, dann kann das Integral angenähert werden:

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2}(x_i - x_{i-1})$$

1

Trapezregel für äquidistante Teilung:
Ist $[a, b]$ durch $x_k = a + kh$ mit $h = \frac{b-a}{n}$ und $k = 0, 1, \ldots, n$ äquidistant geteilt, so erhält man die *summierte Trapezregel* in der Form

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)$$

Bemerkung: Die Trapezregel liefert dann den exakten Wert des Integrals, wenn $f(x)$ in x_k gerade den Wert y_k annimmt und in den Intervallen $[x_{i-1}, x_i]$ linear ist:

$$f(x) = y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(y_i - y_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Erinnerung

nalysis II

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

sche Integration und Interpolation

Buch Kapitel 2.17-2.18

Lagrange Interpolation

Problemstellung: (Interpolationsproblem)
Sei die Wertetabelle

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n),$$

mit Stützstellen x_k und Werten y_k gegeben ($k = 0, 1, \ldots, n$).

Dann besteht das Interpolationsproblem darin, eine stetig differenzierbare Funktion $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ zu finden, so dass

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots n.$$

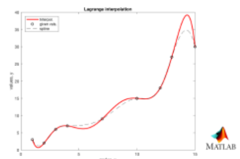
Frage: (Lagrange-Interpolation)
Gibt es eine stetig differenzierbare Funktion f, für die gilt

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n?$$

2

Beispiel

x_i	1	2	3	4	7	10	12	13	15
y_i	3	2	6	7	9	15	18	27	30



Satz: (Lagrange-Polynom)
Das Polynom $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) y_j$ mit Koeffizientenpolynomen

$$L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

erfüllt das Interpolationsproblem. $p_n(x)$ heißt Lagrange-Polynom
$L_j(x)$ sind Produkte aus n Linearfaktoren und daher Polynome n-ten Grades.

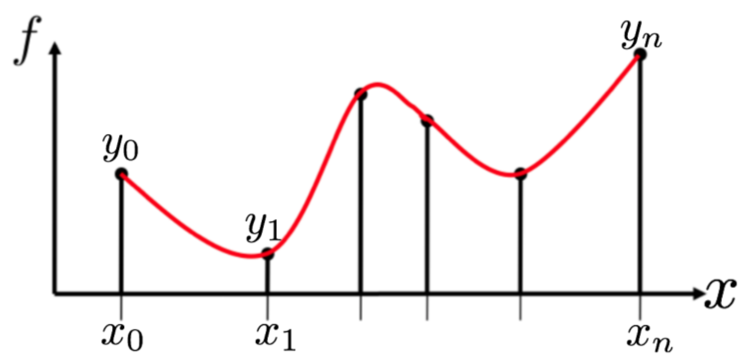
Problemstellung: (Interpolationsproblem)
Sei die Wertetabelle

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n),$$

mit Stützstellen x_k und Werten y_k gegeben ($k = 0, 1, \ldots, n$).

Dann besteht das Interpolationsproblem darin, eine stetig differenzierbare Funktion $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ zu finden, so dass

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots n.$$



Frage: (Lagrange-Interpolation)
Gibt es eine stetig differenzierbare Funktion f, für die gilt

on

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n?$$

2

Satz: (Lagrange-Polynom)
Das Polynom $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) y_j$ mit Koeffizientenpolynomen

$$L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

erfüllt das Interpolationsproblem. $p_n(x)$ heißt Lagrange-Polynom
$L_j(x)$ sind Produkte aus n Linearfaktoren und daher Polynome n-ten Grades.

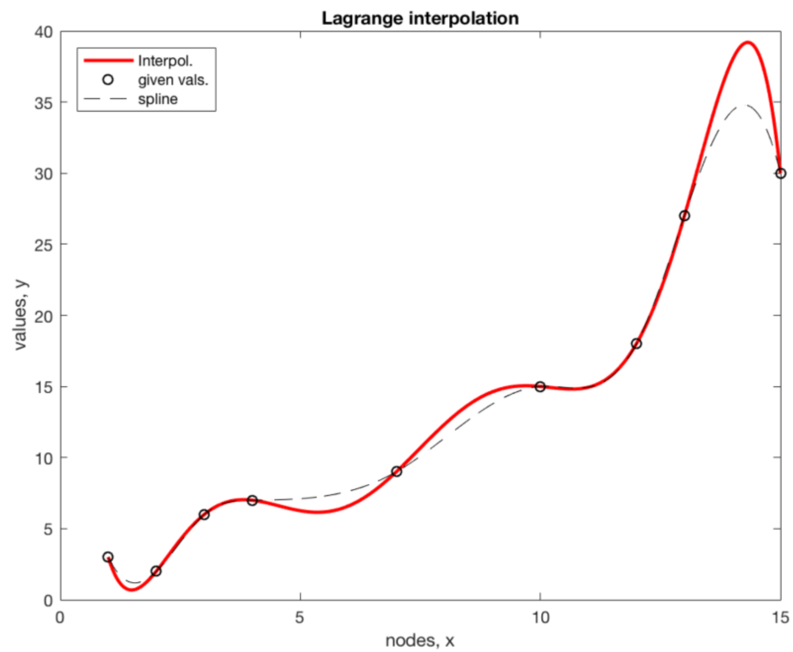
Bemerkung:
Es gibt nur ein Polynom p_n vom Grad n das die Bedingungen

$$p_n(x_i) = y_i$$

für $i = 0, \ldots, n$ erfüllt.

Beispiel

x_i	1	2	3	4	7	10	12	13	15
y_i	3	2	6	7	9	15	18	27	30



MATLAB

Sa
Da
erf
L_j
Be
Es
fü

Newton Interpolation

Vorbemerkungen: (Newton-Interpolation)
Wie bei der Lagrange-Interpolation:

- Wertetabelle ist gegeben: (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$.
- Gesucht ist $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(x_i) = y_i$.
- Wieder soll $f(x) = p_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades sein
  $\Rightarrow$ es ist das selbe Polynom.

Anders als bei der Lagrange-Interpolation:

- Ansatz:

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

- Bestimme b_i, so dass $p_n(x_i) = y_i$, erhalten gestaffeltes Gleichungssystem.

3

Folgerung: Mit den Dividierten Differenzen lässt sich $p_n(x)$ schreiben:

$$p_n(x) = [x_0] + [x_0x_1](x - x_0) + [x_0x_1x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + [x_0 \dots x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}).$$

4

Bemerkung: (Newton-Interpolation – gestaffeltes Gleichungssystem)
Wir erhalten ein gestaffeltes Gleichungssystem der Form:

$$\begin{aligned}
y_0 &= b_0 \\
y_1 &= b_0 + b_1(x_1 - x_0) \\
y_2 &= b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\
&\vdots \\
y_n &= b_0 + b_1(x_n - x_0) + b_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \cdots + \\
&\quad b_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})
\end{aligned}$$

Bemerkung: (Dividierte Differenzen)
Ist $f(x_i) = y_i$ $(i = 0, \dots, n)$ an $n + 1$ Stützstellen gegeben so lassen sich Dividierte Differenzen oder auch Steigungen definieren durch:

- **Dividierte Differenzen 0-ter Ordnung:**

$$[x_i] := y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

- **Dividierte Differenzen 1-ter Ordnung:**

$$[x_ix_j] := \frac{[x_i] - [x_j]}{x_i - x_j}, \quad i, j = 0, \dots, n, \ i \neq j.$$

- **Dividierte Differenzen r-ter Ordnung:**

$$[x_ix_{i+1} \dots x_{i+r}] := \frac{[x_{i+1} \dots x_{i+r}] - [x_i \dots x_{i+r-1}]}{x_{i+r} - x_i}.$$

Vorbemerkungen: (Newton-Interpolation)
Wie bei der Lagrange-Interpolation:

- Wertetabelle ist gegeben: (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$.
- Gesucht ist $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(x_i) = y_i$.
- Wieder soll $f(x) = p_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades sein
  $\Rightarrow$ es ist das selbe Polynom.

Anders als bei der Lagrange-Interpolation:

- Ansatz:

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

- Bestimme b_i, so dass $p_n(x_i) = y_i$, erhalten gestaffeltes Gleichungssystem.

3

Bemerkung: (Newton-Interpolation – gestaffeltes Gleichungssystem)
Wir erhalten ein gestaffeltes Gleichungssystem der Form:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= b_0 \\
y_1 &= b_0 + b_1(x_1 - x_0) \\
y_2 &= b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\
&\vdots \\
y_n &= b_0 + b_1(x_n - x_0) + b_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \cdots + \\
&\quad b_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Bemerkung: (Dividierte Differenzen)
Ist $f(x_i) = y_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ an $n+1$ Stützstellen gegeben so lassen sich Dividierte Differenzen oder auch Steigungen definieren durch:

- **Dividierte Differenzen 0-ter Ordnung:**

$$[x_i] := y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

- **Dividierte Differenzen 1-ter Ordnung:**

$$[x_i x_j] := \frac{[x_i] - [x_j]}{x_i - x_j}, \quad i, j = 0, \ldots, n, \ i \neq j.$$

- **Dividierte Differenzen r-ter Ordnung:**

$$[x_i x_{i+1} \ldots x_{i+r}] := \frac{[x_{i+1} \ldots x_{i+r}] - [x_i \ldots x_{i+r-1}]}{x_{i+r} - x_i}.$$

Bemerkung: Es gilt die Symmetrie-Eigenschaft

$$[x_0 x_1 \ldots x_n] = [x_n x_{n-1} \ldots x_0] = [x_{k_0} x_{k_1} \ldots x_{k_n}]$$

Folgerung: Mit den Dividierten Differenzen lässt sich $p_n(x)$ schreiben:

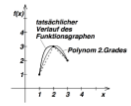
$p_n(x) = [x_0] + [x_0 x_1](x - x_0) + [x_0 x_1 x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + [x_0 \ldots x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}).$

4

Numerische Integration
Simpson-Regel

Erinnerung:
Die Integration mit der Trapezregel war für f linear innerhalb der Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \dots, n)$ exakt.

Ziel:
Genaue Integration für kompliziertere Funktionen (siehe Skizze)



Beispiel:

- **Gegeben:** Wertetabelle $\begin{array}{cccc} x_i & 1 & 2 & 3 \\ y_i & 1 & 3 & 2 \end{array}$
- **Trapez-Regel:**
$$\int_1^3 f(x)\ dx \approx 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2,5 = 4,5.$$
- **Lagrange-Polynom:**
$$p_n(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{2} \cdot 1 + \frac{(x-1)(x-3)}{-1} \cdot 3 \frac{(x-1)(x-2)}{2} \cdot 2.$$
- **Integration:**
$$\int_1^3 f(x)\ dx \approx \int_1^3 p_2(x)\ dx = \frac{1}{3}(1 + 4 \cdot 3 + 2) = 5.$$

Verallgemeinerung:
Sei (x_i, y_i) $(i = 0, \dots, n)$ mit $x_i = a + ih$, wobei $h = \frac{b-a}{n}$ äquidistante Stützstellen, also $[x_0, x_n] = [a, b]$. $n = 2m$ sei gerade angenommen.

- Dann existieren Teilintervalle $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ $(k = 1, \dots, m)$ so dass
$$[x_0, x_n] = \bigcup_{k=1}^{m} [x_{2k-2}, x_{2k}].$$
- Bestimme für $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ die Wertepaare $(x_{2k-2}, y_{2k-2}), (x_{2k-1}, y_{2k-1}), (x_{2k}, y_{2k})$, und Berechne das Polynom $p_2(x)$ mit $p_2(x_{2k-j}) = y_{2k-j}$ $(j = 0, 1, 2)$.
- Das Integral im Teilintervall $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ist dann gegeben durch die Kepplersche Fassregel:
$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_2(x)\ dx = \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$
- Nun kann das gesamte Integral berechnet werden mit der Simpson-Regel:
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\ dx &\approx \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_2(x)\ dx \\ &= \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2m}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})\right] \end{aligned}$$

Ne

Vorbemerkungen: (Newton-Interpolatio
Wie bei der Lagrange-Interpolation:

- Wertetabelle ist gegeben: (x_i, y_i),
- Gesucht ist $f : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ stetig
- Wieder soll $f(x) = p_n(x)$ ein Poly
$\Rightarrow$ es ist das selbe Polynom.

Anders als bei der Lagrange-Interpolatio

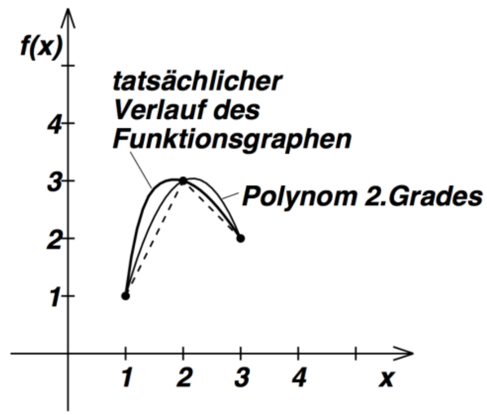
- Ansatz:
$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x$
- Bestimme b_i, so dass $p_n(x_i) = y_i$,

Folgerung: Mit den Dividierten Differenzen lässt

$p_n(x) = [x_0] + [x_0x_1](x - x_0) + [x_0x_1x_2](x - x_0$

Erinnerung:
Die Integration mit der Trapezregel war für f linear innerhalb der Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ exakt.

Ziel:
Genaue Integration für kompliziertere Funktionen (siehe Skizze)



Idee:
Berechne das Integral des Interpolationspolynoms!

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_n(x)\,dx.$$

Beispiel:

- **Gegeben:** Wertetabelle $\begin{array}{cccc} x_i & 1 & 2 & 3 \\ y_i & 1 & 3 & 2 \end{array}$
- **Trapez-Regel:**
$$\int_1^3 f(x)\;dx \approx 1\cdot 2 + 1\cdot 2,5 = 4,5.$$
- **Lagrange-Polynom:**
$$p_n(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{2}\cdot 1 + \frac{(x-1)(x-3)}{-1}\cdot 3\frac{(x-1)(x-2)}{2}\cdot 2.$$
- **Integration:**
$$\int_1^3 f(x)\;dx \approx \int_1^3 p_2(x)\;dx = \frac{1}{3}(1+4\cdot 3+2) = 5.$$

Verallgemeinerung:
Sei (x_i, y_i) $(i = 0, \ldots, n)$ mit $x_i = a + ih$, wobei $h = \frac{b-a}{n}$ äquidistante Stützstellen, also $[x_0, x_n] = [a, b]$. $n = 2m$ sei gerade angenommen.

- Dann existieren Teilintervalle $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ $(k = 1, \ldots, m)$ so dass
$$[x_0, x_n] = \bigcup_{k=1}^{m} [x_{2k-2}, x_{2k}].$$

- Bestimme für $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ die Wertepaare $(x_{2k-2}, y_{2k-2}), (x_{2k-1}, y_{2k-1}), (x_{2k}, y_{2k})$, und Berechne das Polynom $p_2(x)$ mit $p_2(x_{2k-j}) = y_{2k-j}$ $(j = 0, 1, 2)$.

- Das Integral im Teilintervall $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ist dann gegeben durch die Kepplersche Fassregel:
$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_2(x)\ dx = \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$

- Nun kann das gesamte Integral berechnet werden mit der Simpson-Regel:
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\ dx &\approx \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_2(x)\ dx \\ &= \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2m}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1})\right] \end{aligned}$$

Erinnerung

Analysis II

Jörn Behrens mit Kai Rothe

Numerische Integration und Interpolation

Numerische Integration Trapezregel

Lagrange Interpolation

Beispiel

Numerische Integration Simpson-Regel

Newton Interpolation