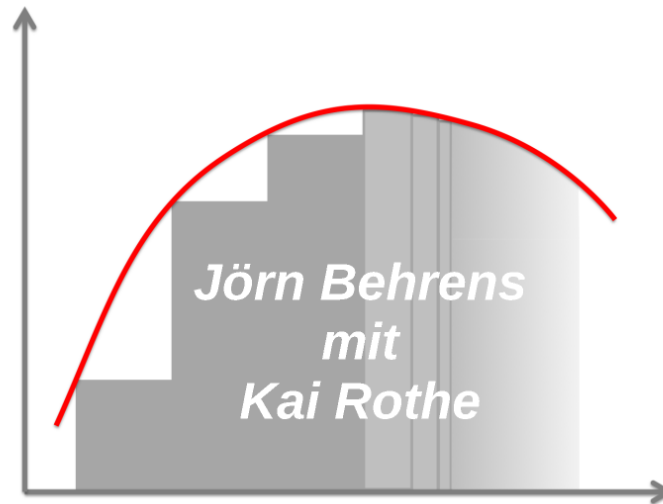


# Analysis II



Numerische Integration und Interpolation

Buch Kapitel 2.17-2.18

# Erinnerung

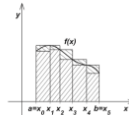
## Obersumme/Untersumme

Sei  $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$  und  $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ .  
 Dann bildet man über  $[x_{i-1}, x_i]$  oben bzw. unten Rechteck  
 mit Flächeninhalten  $\Delta x_i \cdot M_i$  bzw.  $\Delta x_i \cdot m_i$ .  
 Damit erhält man

$$S_f(Z) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \quad \text{Obersumme,}$$

$$s_f(Z) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \quad \text{Untersumme}$$

von  $f$  bezüglich  $Z$ .



## Riemannsche Summe

Sei  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  beliebig im Intervall,  $i = 1, \dots, n$ , so gilt  $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ .

$$R_f(Z) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

heißt **Riemannsche Summe** bezüglich der Zerlegung  $Z$ .

**Satz:** (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)  
 Ist  $F$  Stammfunktion einer stetigen Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Intervall  $I$ .  
 Dann gilt für beliebige  $a, b \in I$

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

## Oberintegral/Oberintegral

Für feiner werdende Zerlegungen  $Z$  ist klar, dass die Obersumme kleiner und die  
 Untersumme größer wird.  
 Daher

$$I_f = \lim_Z S_f(Z), \quad \text{Oberintegral}$$

$$I_f = \lim_Z s_f(Z), \quad \text{Unterintegral}$$

von  $f$  bezüglich  $Z$ .

## Definition (Riemannsches Integral)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkte Funktion. Dann heißt  $f$  **Riemann-integrierbar**, falls  
 $I_f = \bar{I}_f$ .

Der gemeinsame Grenzwert wird **bestimmtes Riemannsches Integral** von  $f$  über  $[a, b]$   
 genannt:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

- $a$  heißt untere,  $b$  obere **Integrationsgrenze**,
- $[a, b]$  heißt **Integrationsintervall**,
- $x$  heißt **Integrationsvariable**,
- $f(x)$  heißt **Integrand**.

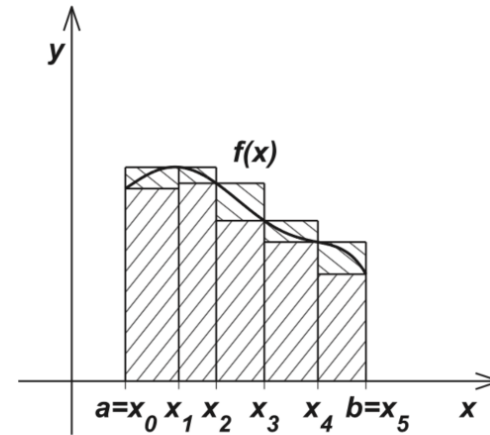
### Obersumme/Untersumme:

Sei  $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$  und  $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ .  
Dann bildet man über  $[x_{i-1}, x_i]$  oberes bzw. unteres Rechteck  
mit Flächeninhalten  $\Delta x_i \cdot M_i$  bzw.  $\Delta x_i \cdot m_i$ .

Damit erhält man

$$S_f(Z) = \sum_{i=1:n} M_i \Delta x_i \quad \text{Obersumme,}$$

$$s_f(Z) = \sum_{i=1:n} m_i \Delta x_i \quad \text{Untersumme}$$



**Oberint**  
Für feine  
Untersur  
Daher

von  $f$  bezüglich  $Z$ .

von  $f$  be

### Riemannsche Summe:

Sei  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  beliebig im Intervall,  $i = 1 : n$ , so gilt  $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ .

$$R(Z) = \sum_{i=1:n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

heißt **Riemannsche Summe** bezüglich der Zerlegung  $Z$ .

### **Oberintegral/Oberintegral:**

Für feiner werdende Zerlegungen  $Z$  ist klar, dass die Obersumme kleiner und die Untersumme größer wird.

Daher

$$\bar{I}_f = \inf_Z S_f(Z), \quad \text{Oberintegral}$$

$$\underline{I}_f = \sup_Z s_f(Z), \quad \text{Unterintegral}$$

→  
:x<sub>5</sub> x

von  $f$  bezüglich  $Z$ .

g)  
n Intervall  $I$ .

**Definition:** (Riemannsches Integral)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkte Funktion. Dann heißt  $f$  **Riemann-integrierbar**, falls  $\underline{I}_f = \bar{I}_f$ .

Der gemeinsame Grenzwert wird **bestimmtes Riemannsches Integral** von  $f$  über  $[a, b]$  genannt:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

- $a$  heißt untere,  $b$  obere **Integrationsgrenze**,
- $[a, b]$  heißt **Integrationsintervall**,
- $x$  heißt **Integrationsvariable**,
- $f(x)$  heißt **Integrand**.

**Satz:** (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)  
Ist  $F$  Stammfunktion einer stetigen Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Intervall  $I$ .  
Dann gilt für beliebige  $a, b \in I$

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

**Definition:**

Sei  $f : [a, b]$   
 $\underline{I}_f = \bar{I}_f$ .

Der gemeinsame  
genannt:

- $a$  heißt
- $[a, b]$
- $x$  heißt
- $f(x)$

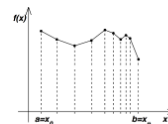
# Numerische Integration Trapezregel

**Beobachtung:** Schwieriger Ansatz zur Lösung des Integral  $\int_a^b f(x) dx$

- Finde Stammfunktion  $F(x)$ .
- Berechne  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .

**Fragen:**

- Was tun, wenn  $F(x)$  unbekannt ist?
- Was tun, wenn  $F(x)$  bzw.  $F(b)$  nicht einfach ausgewertet werden können?
- Was tun, wenn  $f$  nicht als Funktion gegeben ist?



**Berechnungsidee:**  
Flächeninhalt jedes Abschnittes (Höhe  $\times$  Breite):  
$$\frac{y_{i-1} + y_i}{2} (x_i - x_{i-1})$$

**Trapezregel:**

Sei  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  eine Unterteilung des Intervalls  $[a, b]$  und seien  $y_i = f(x_i)$ , dann kann das Integral angenähert werden:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} (x_i - x_{i-1}) \quad \text{①}$$

**Trapezregel für äquidistante Teilung:**  
Ist  $[a, b]$  durch  $x_k = a + kb$  mit  $h = \frac{b-a}{n}$  und  $k = 0, 1, \dots, n$  äquidistant geteilt, so erhält man die summierte Trapezregel in der Form

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left( \frac{1}{2} y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right)$$

## Erinnerung

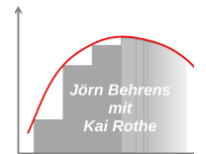
**Rechteckregel:**  $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) (x_i - x_{i-1})$

**Trapezregel:**  $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} (x_i - x_{i-1})$

**Newton-Cotes-Formel:**  $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n c_k f(x_k)$

**Newton-Cotes-Formel:**  $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n c_k f(x_k)$

## Analysis



Numerische Integration und Int

Buch Kapitel 2.17-2.18

**Beobachtung:**

Bisheriger Ansatz zur Lösung des Integrals  $\int_a^b f(x) dx$ :

- Finde Stammfunktion  $F(x)$ .
- Berechne  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .

**Fragen:**

- Was tun, wenn  $F(x)$  unbekannt ist?
- Was tun, wenn  $F(a)$  bzw.  $F(b)$  nicht einfach ausgewertet werden können?
- Was tun, wenn  $f$  nicht als Funktion gegeben ist?

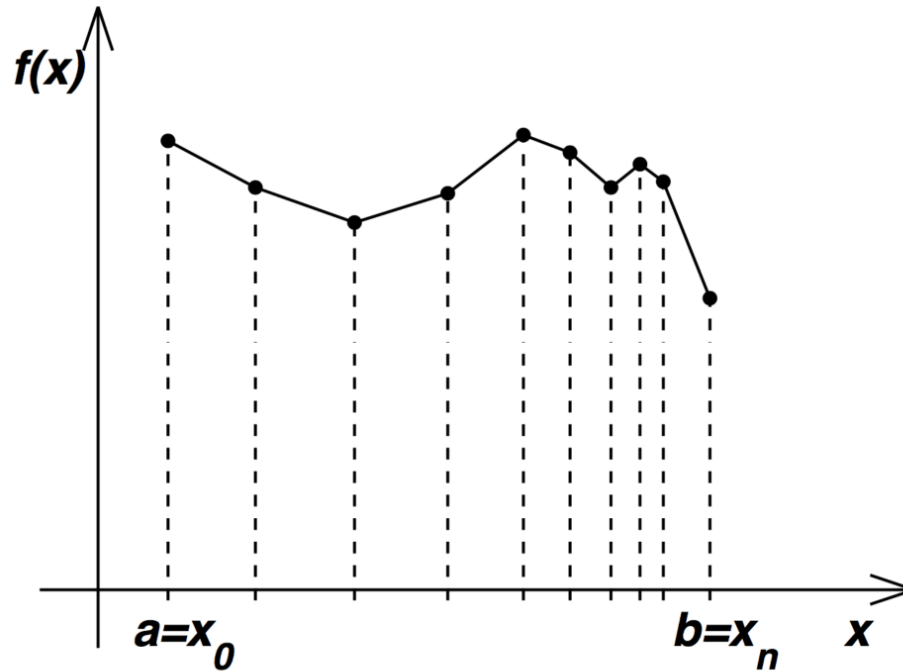
**Beispiel:**

$f$  könnte in Form diskreter Messwerte gegeben sein:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

**Idee: numerische Berechnung**



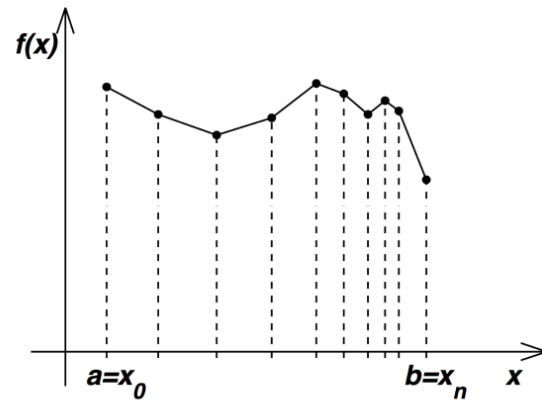


**Berechnungsidee:**

Flächeninhalt jedes Abschnittes (Höhe  $\times$  Breite):

$$\frac{y_{i+1} + y_i}{2} (x_{i+1} - x_i)$$

! können?



**Berechnungsidee:**

Flächeninhalt jedes Abschnittes (Höhe  $\times$  Breite):

$$\frac{y_{i+1} + y_i}{2} (x_{i+1} - x_i)$$

**Trapezregel:**

Sei  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  eine Unterteilung des Intervalls  $[a, b]$  und seien  $y_i = f(x_i)$ , dann kann das Integral angenähert werden:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} (x_i - x_{i-1})$$

1

**Trapezregel für äquidistante Teilung:**

Ist  $[a, b]$  durch  $x_k = a + kh$  mit  $h = \frac{b-a}{n}$  und  $k = 0, 1, \dots, n$  äquidistant geteilt, so erhält man die *summierte Trapezregel* in der Form

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left( \frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n \right)$$

**Bemerkung:** Die Trapezregel liefert dann den exakten Wert des Integrals, wenn  $f(x)$  in  $x_k$  gerade den Wert  $y_k$  annimmt und in den Intervallen  $[x_{i-1}, x_i]$  linear ist:

$$f(x) = y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(y_i - y_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

## Erinnerung

**Interpolationspolynom**  
 Ein Polynom  $p_n(x)$  ist ein Polynom  $n$ -ten Grades, das  $n+1$  Stützstellen  $(x_k, y_k)$  durchläuft.

**Problemstellung**  
 Sei die Wertetabelle  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  mit Stützstellen  $x_k$  und Werten  $y_k$  gegeben ( $k = 0, 1, \dots, n$ ). Dann besteht das Interpolationsproblem darin, eine stetig differenzierbare Funktion  $f: [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$  zu finden, so dass  $f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$

# Lagrange Interpolation

**Problemstellung:** (Interpolationsproblem)  
 Sei die Wertetabelle  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  mit Stützstellen  $x_k$  und Werten  $y_k$  gegeben ( $k = 0, 1, \dots, n$ ). Dann besteht das Interpolationsproblem darin, eine stetig differenzierbare Funktion  $f: [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$  zu finden, so dass  $f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$

**Frage:** (Lagrange-Interpolation)  
 Gibt es eine stetig differenzierbare Funktion  $f$ , für die gilt  $f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n?$

2

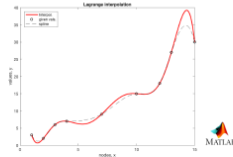
## Analysis II



Stetige Integration und Interpolation  
 Buch Kapitel 2.17-2.18

### Beispiel

|       |   |   |   |   |   |    |    |    |    |
|-------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| $x_k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 7 | 10 | 12 | 13 | 15 |
| $y_k$ | 3 | 2 | 6 | 7 | 9 | 15 | 18 | 27 | 30 |



**Satz:** (Lagrange-Polynom)  
 Das Polynom  $p_n(x) = \sum_{j=0}^n L_j(x)y_j$  mit Koeffizientenpolynomen

$$L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

erfüllt das Interpolationsproblem.  $p_n(x)$  heißt **Lagrange-Polynom**.  $L_j(x)$  sind Produkte aus  $n$  Linearfaktoren und daher Polynome  $n$ -ten Grades.

**Problemstellung:** (Interpolationsproblem)

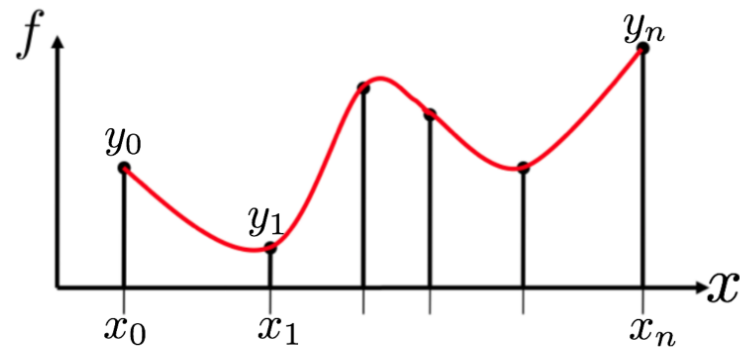
Sei die Wertetabelle

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n),$$

mit **Stützstellen**  $x_k$  und **Werten**  $y_k$  gegeben ( $k = 0, 1, \dots, n$ ).

Dann besteht das Interpolationsproblem darin, eine stetig differenzierbare Funktion  $f : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$  zu finden, so dass

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$



**Frage:** (Lagrange-Interpolation)

Gibt es eine stetig differenzierbare Funktion  $f$ , für die gilt

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n?$$

2

**Satz:** (Lagrange-Polynom)

Das Polynom  $p_n(x) = \sum_{j=0}^n L_j(x)y_j$  mit Koeffizientenpolynomen

$$L_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

erfüllt das Interpolationsproblem.  $p_n(x)$  heißt **Lagrange-Polynom**  
 $L_j(x)$  sind Produkte aus  $n$  Linearfaktoren und daher Polynome  $n$ -ten Grades.

**Bemerkung:**

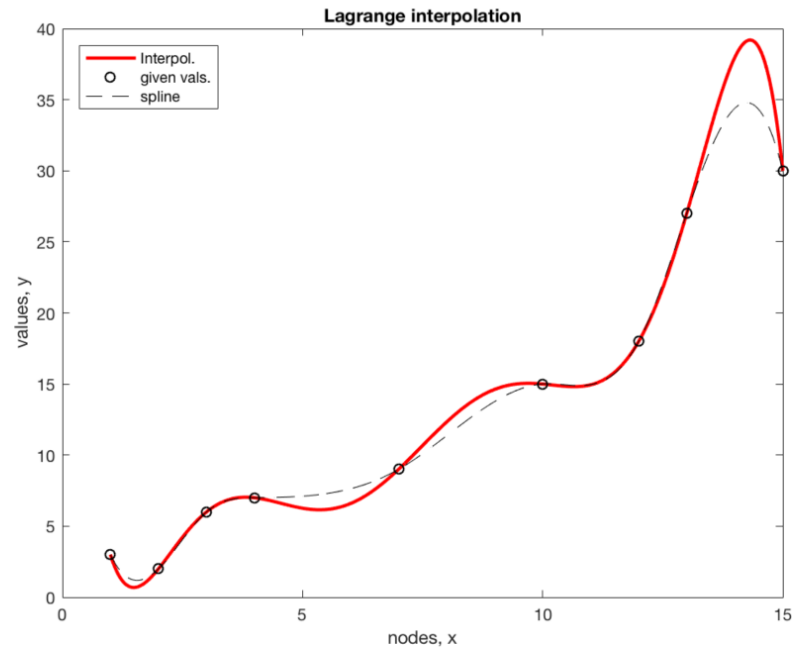
Es gibt nur ein Polynom  $p_n$  vom Grad  $n$  das die Bedingungen

$$p_n(x_i) = y_i$$

für  $i = 0, \dots, n$  erfüllt.

# Beispiel

|       |   |   |   |   |   |    |    |    |    |
|-------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 7 | 10 | 12 | 13 | 15 |
| $y_i$ | 3 | 2 | 6 | 7 | 9 | 15 | 18 | 27 | 30 |



Sa  
Da

erl  
 $L_j$

B  
Es

fü



tion

$$\begin{array}{r} x_1 \ 1 \ 2 \ 3 \\ h \ 1 \ 3 \ 2 \end{array}$$

$$\int x \, dx = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2, 5 = 4, 5.$$

$$\int_0^1 \frac{(x-1)(x-3)}{-1} \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{2} \cdot 2.$$

$$\int_0^1 p_2(x) \, dx = \frac{1}{3}(1+4+3+2) = 5.$$

# Newton Interpolation

**Vorbemerkungen:** (Newton-Interpolation)  
Wie bei der Lagrange-Interpolation:

- Wertetabelle ist gegeben:  $(x_i, y_i), i = 0, \dots, n$ .
- Gesucht ist  $f: [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar mit  $f(x_i) = y_i$ .
- Wieder soll  $f(x) = p_n(x)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades sein  
 $\Rightarrow$  es ist das selbe Polynom.

Anders als bei der Lagrange-Interpolation:

- Ansatz:  

$$p_n(x) = h_0 + h_1(x-x_0) + h_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + h_n(x-x_0) \dots (x-x_{n-1})$$
- Bestimme  $h_i$ , so dass  $p_n(x_i) = y_i$ , erhalten gestaffeltes Gleichungssystem.

3

**Folgerung:** Mit den Dividierten Differenzen lässt sich  $p_n(x)$  schreiben:

$$p_n(x) = h_0 + [h_0, h_1](x-x_0) + [h_0, h_1, h_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots + [h_0, \dots, h_n](x-x_0) \dots (x-x_{n-1}).$$

4

**Bemerkung:** (Newton-Interpolation – gestaffeltes Gleichungssystem)  
Wir erhalten ein gestaffeltes Gleichungssystem der Form:

$$\begin{aligned} y_0 &= h_0 \\ y_1 &= h_0 + h_1(x_1 - x_0) \\ y_2 &= h_0 + h_1(x_2 - x_0) + h_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &\vdots \\ y_n &= h_0 + h_1(x_n - x_0) + h_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots + \\ &\quad h_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

**Bemerkung:** (Dividierte Differenzen)  
Ist  $f(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$  an  $n+1$  Stützstellen gegeben so lassen sich **Dividierte Differenzen** oder auch Steigungen definieren durch:

- **Dividierte Differenzen 0-ter Ordnung:**

$$[x_i] := y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

- **Dividierte Differenzen 1-ter Ordnung:**

$$[x_i, x_j] := \frac{[x_i] - [x_j]}{x_i - x_j}, \quad i, j = 0, \dots, n, \quad i \neq j.$$

- **Dividierte Differenzen r-ter Ordnung:**

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+r}] := \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+r}] - [x_i, \dots, x_{i+r-1}]}{x_{i+r} - x_i}$$

**Vorbemerkungen:** (Newton-Interpolation)

Wie bei der Lagrange-Interpolation:

- Wertetabelle ist gegeben:  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$ .
- Gesucht ist  $f : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar mit  $f(x_i) = y_i$ .
- Wieder soll  $f(x) = p_n(x)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades sein  
 $\Rightarrow$  es ist das selbe Polynom.

Anders als bei der Lagrange-Interpolation:

- Ansatz:

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

- Bestimme  $b_i$ , so dass  $p_n(x_i) = y_i$ , erhalten gestaffeltes Gleichungssystem.

3

**Bemerkung:** (Newton-Interpolation – gestaffeltes Gleichungssystem)

Wir erhalten ein gestaffeltes Gleichungssystem der Form:

$$y_0 = b_0$$

$$y_1 = b_0 + b_1(x_1 - x_0)$$

$$y_2 = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$\vdots$

$$y_n = b_0 + b_1(x_n - x_0) + b_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \cdots + b_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})$$

**Bemerkung:** (Dividierte Differenzen)

Ist  $f(x_i) = y_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) an  $n + 1$  Stützstellen gegeben so lassen sich **Dividierte Differenzen** oder auch Steigungen definieren durch:

- **Dividierte Differenzen 0-ter Ordnung:**

$$[x_i] := y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

- **Dividierte Differenzen 1-ter Ordnung:**

$$[x_i x_j] := \frac{[x_i] - [x_j]}{x_i - x_j}, \quad i, j = 0, \dots, n, \quad i \neq j.$$

- **Dividierte Differenzen  $r$ -ter Ordnung:**

$$[x_i x_{i+1} \dots x_{i+r}] := \frac{[x_{i+1} \dots x_{i+r}] - [x_i \dots x_{i+r-1}]}{x_{i+r} - x_i}.$$

**Bemerkung:** Es gilt die Symmetrie-Eigenschaft

$$[x_0 x_1 \dots x_n] = [x_n x_{n-1} \dots x_0] = [x_{k_0} x_{k_1} \dots x_{k_n}]$$

**Folgerung:** Mit den Dividierten Differenzen lässt sich  $p_n(x)$  schreiben:

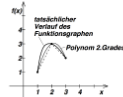
$$p_n(x) = [x_0] + [x_0x_1](x - x_0) + [x_0x_1x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + [x_0 \dots x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}).$$



# Numerische Integration Simpson-Regel

**Erinnerung:**  
Die Integration mit der Trapezregel war für  $f$  linear innerhalb der Teilintervalle  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) exakt.

**Ziel:**  
Genauere Integration für kompliziertere Funktionen (siehe Skizze)



**Beispiel:**

• Gegeben: Wertetabelle

|       |   |   |   |
|-------|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
| $y_i$ | 1 | 3 | 2 |

• Trapez-Regel:  $\int_1^3 f(x) dx \approx 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2,5 = 4,5$

• Lagrange-Polynom:

$$p_2(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{2} \cdot 1 + \frac{(x-1)(x-3)}{-1} \cdot 3 + \frac{(x-1)(x-2)}{2} \cdot 2$$

• Integration:

$$\int_1^3 f(x) dx \approx \int_1^3 p_2(x) dx = \frac{1}{3}(1+4+2) = 5$$

**Verallgemeinerung:**

Sei  $(x_j, y_j)$  ( $j = 0, \dots, n$ ) mit  $x_j = a + jh$ , wobei  $h = \frac{b-a}{n}$  äquidistante Stützstellen, also  $[x_{2k-2}, x_{2k}] = [x_{2k-2}, x_{2k}]$ ,  $n = 2m$  sei gerade angenommen.

• Dann existieren Teilintervalle  $[x_{2k-2}, x_{2k}]$  ( $k = 1, \dots, m$ ) so dass

$$[x_0, x_n] = \bigcup_{k=1}^m [x_{2k-2}, x_{2k}]$$

• Bestimme für  $[x_{2j-2}, x_{2j}]$  die Wertepaare  $(x_{2j-2}, y_{2j-2}), (x_{2j-1}, y_{2j-1}), (x_{2j}, y_{2j})$ , und berechne das Polynom  $p_j(x)$  mit  $p_j(x_{2j-2}) = y_{2j-2}$  ( $j = 0, 1, 2$ ).

• Das Integral im Teilintervall  $[x_{2j-2}, x_{2j}]$  ist dann gegeben durch die **Kepplersche Fassregel**:

$$\int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} p_j(x) dx = \frac{h}{3}(y_{2j-2} + 4y_{2j-1} + y_{2j})$$

• Nun kann das gesamte Integral berechnet werden mit der **Simpson-Regel**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^m \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_k(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + y_{2m} + 2(y_1 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_2 + \dots + y_{2m-1})]$$

Ne

**Vorbemerkungen:** (Newton-Interpolat: Wie bei der Lagrange-Interpolation:

- Wertetabelle ist gegeben:  $(x_i, y_i)$ ,
- Gesucht ist  $f: [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig
- Wieder soll  $f(x) = p_n(x)$  ein Poly  $\Rightarrow$  es ist das **selbe Polynom**.

Anders als bei der Lagrange-Interpolation

- Ansatz:  
 $p_n(x) = h_0 + h_1(x-x_0) + h_2(x-x_0)(x-x_1)$
- Bestimme  $h_i$ , so dass  $p_n(x_i) = y_i$ .

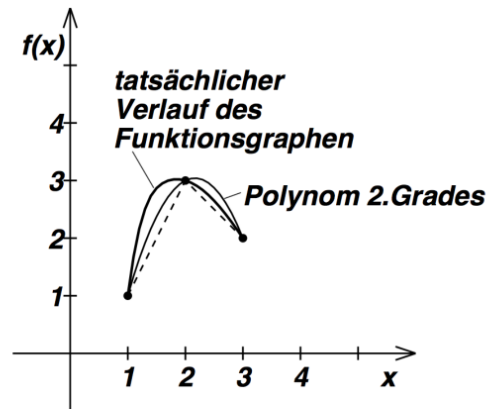
**Folgerung:** Mit den Dividenden Differenzen lässt  
 $p_n(x) = [y]_n + [y]_{n-1}(x-x_0) + [y]_{n-2}(x-x_0)(x-x_1)$

**Erinnerung:**

Die Integration mit der Trapezregel war für  $f$  linear innerhalb der Teilintervalle  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) exakt.

**Ziel:**

Genauere Integration für kompliziertere Funktionen (siehe Skizze)

**Idee:**

Berechne das Integral des Interpolationspolynoms!

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) dx.$$

**Beispiel:**

- **Gegeben:** Wertetabelle  $\begin{array}{cc} x_i & 1 & 2 & 3 \\ y_i & 1 & 3 & 2 \end{array}$

- **Trapez-Regel:**

$$\int_1^3 f(x) dx \approx 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2,5 = 4,5.$$

- **Lagrange-Polynom:**

$$p_n(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{2} \cdot 1 + \frac{(x-1)(x-3)}{-1} \cdot 3 + \frac{(x-1)(x-2)}{2} \cdot 2.$$

- **Integration:**

$$\int_1^3 f(x) dx \approx \int_1^3 p_2(x) dx = \frac{1}{3}(1 + 4 \cdot 3 + 2) = 5.$$



**Verallgemeinerung:**

Sei  $(x_i, y_i)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) mit  $x_i = a + ih$ , wobei  $h = \frac{b-a}{n}$  äquidistante Stützstellen, also  $[x_0, x_n] = [a, b]$ .  $n = 2m$  sei gerade angenommen.

- Dann existieren Teilintervalle  $[x_{2k-2}, x_{2k}]$  ( $k = 1, \dots, m$ ) so dass

$$[x_0, x_n] = \bigcup_{k=1}^m [x_{2k-2}, x_{2k}].$$

- Bestimme für  $[x_{2k-2}, x_{2k}]$  die Wertepaare  $(x_{2k-2}, y_{2k-2}), (x_{2k-1}, y_{2k-1}), (x_{2k}, y_{2k})$ , und Berechne das Polynom  $p_2(x)$  mit  $p_2(x_{2k-j}) = y_{2k-j}$  ( $j = 0, 1, 2$ ).
- Das Integral im Teilintervall  $[x_{2k-2}, x_{2k}]$  ist dann gegeben durch die **Keplersche Fassregel**:

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_2(x) dx = \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$

- Nun kann das gesamte Integral berechnet werden mit der **Simpson-Regel**:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{k=1}^m \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} p_2(x) dx \\ &= \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2m}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})] \end{aligned}$$

Erinnerung

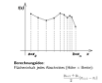
$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta x_k f(\xi_k)$   
 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$   
 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$   
 $x_0 = a, x_n = b$

Analysis II

Numerische Integration und Interpolation  
 Mathematik 2.17.13.18

Numerische Integration Trapezregel

**Definition:** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.  
 Sei  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  eine Zerlegung des Intervalls  $[a, b]$  und sei  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$  für  $k = 1, \dots, n$ .  
**Formel:**  $T(f) = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta x_k}{2} (f(x_{k-1}) + f(x_k))$   
**Wichtig:** Die Trapezregel liefert den exakten Wert der Integral, wenn  $f$  ein Polynom vom Grad  $\leq 1$  ist.  
**Über numerische Berechnung**



**Formel:**  $T(f) = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta x_k}{2} (f(x_{k-1}) + f(x_k))$

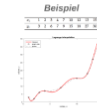
**Wichtigste Eigenschaft:** Die Trapezregel liefert den exakten Wert der Integral, wenn  $f$  ein Polynom vom Grad  $\leq 1$  ist.  
**Formel:**  $T(f) = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta x_k}{2} (f(x_{k-1}) + f(x_k))$

**Beispiel:** Sei  $f(x) = x^2$  und  $[a, b] = [0, 1]$ .  
**Formel:**  $T(f) = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta x_k}{2} (f(x_{k-1}) + f(x_k))$

Lagrange Interpolation

**Problemstellung (Interpolationsproblem):** Gegeben  $n+1$  Stützstellen  $x_0, \dots, x_n$  und  $n+1$  Funktionswerte  $y_0, \dots, y_n$ .  
**Frage:** Gibt es eine eindeutig bestimmte Polynomfunktion  $L_n$  vom Grad  $\leq n$ , die alle Stützstellen  $(x_i, y_i)$  enthält?

**Frage:** Lagrange-Interpolation: Gibt es eine einzig differenzierbare Funktion  $f$ , für die gilt  $f(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$ ?



**Formel:**  $L_n(x) = \sum_{i=0}^n \ell_i(x) y_i$ , mit  $\ell_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

**Wichtig:** Die Interpolationspolynome  $L_n$  sind mit Lagrange-Polynomen  $\ell_i$  und Polynomen  $y_i$  ein Linearfall und daher Polynome  $\leq n$  Grades.

**Beispiel:** Sei  $f(x) = x^2$  und  $[a, b] = [0, 1]$ .  
**Formel:**  $L_n(x) = \sum_{i=0}^n \ell_i(x) y_i$

Numerische Integration Simpson-Regel

**Definition:** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.  
 Sei  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  eine Zerlegung des Intervalls  $[a, b]$  und sei  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$  für  $k = 1, \dots, n$ .  
**Formel:**  $S(f) = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta x_k}{3} (f(x_{k-1}) + 4f(\xi_k) + f(x_k))$   
**Wichtig:** Die Simpson-Regel liefert den exakten Wert der Integral, wenn  $f$  ein Polynom vom Grad  $\leq 3$  ist.  
**Über numerische Berechnung**



**Formel:**  $S(f) = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta x_k}{3} (f(x_{k-1}) + 4f(\xi_k) + f(x_k))$

**Wichtigste Eigenschaft:** Die Simpson-Regel liefert den exakten Wert der Integral, wenn  $f$  ein Polynom vom Grad  $\leq 3$  ist.  
**Formel:**  $S(f) = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta x_k}{3} (f(x_{k-1}) + 4f(\xi_k) + f(x_k))$

**Beispiel:** Sei  $f(x) = x^4$  und  $[a, b] = [0, 1]$ .  
**Formel:**  $S(f) = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta x_k}{3} (f(x_{k-1}) + 4f(\xi_k) + f(x_k))$

Newton Interpolation

**Problemstellung (Newton-Interpolationsproblem):** Gegeben  $n+1$  Stützstellen  $x_0, \dots, x_n$  und  $n+1$  Funktionswerte  $y_0, \dots, y_n$ .  
**Frage:** Gibt es eine eindeutig bestimmte Polynomfunktion  $L_n$  vom Grad  $\leq n$ , die alle Stützstellen  $(x_i, y_i)$  enthält?  
**Formel:**  $L_n(x) = y_0 + (x - x_0) \Delta y_0 + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \Delta^n y_0$   
**Wichtig:** Die Newton-Interpolationspolynome  $L_n$  sind mit Lagrange-Polynomen  $\ell_i$  und Polynomen  $y_i$  ein Linearfall und daher Polynome  $\leq n$  Grades.

**Problemstellung (Newton-Interpolationsproblem - grafische Darstellung):** Gegeben  $n+1$  Stützstellen  $x_0, \dots, x_n$  und  $n+1$  Funktionswerte  $y_0, \dots, y_n$ .  
**Frage:** Gibt es eine eindeutig bestimmte Polynomfunktion  $L_n$  vom Grad  $\leq n$ , die alle Stützstellen  $(x_i, y_i)$  enthält?

**Formel:**  $L_n(x) = y_0 + (x - x_0) \Delta y_0 + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \Delta^n y_0$

**Wichtig:** Die Newton-Interpolationspolynome  $L_n$  sind mit Lagrange-Polynomen  $\ell_i$  und Polynomen  $y_i$  ein Linearfall und daher Polynome  $\leq n$  Grades.

**Beispiel:** Sei  $f(x) = x^2$  und  $[a, b] = [0, 1]$ .  
**Formel:**  $L_n(x) = y_0 + (x - x_0) \Delta y_0 + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \Delta^n y_0$

**Wichtig:** Die Newton-Interpolationspolynome  $L_n$  sind mit Lagrange-Polynomen  $\ell_i$  und Polynomen  $y_i$  ein Linearfall und daher Polynome  $\leq n$  Grades.

**Beispiel:** Sei  $f(x) = x^2$  und  $[a, b] = [0, 1]$ .  
**Formel:**  $L_n(x) = y_0 + (x - x_0) \Delta y_0 + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \Delta^n y_0$

**Wichtig:** Die Newton-Interpolationspolynome  $L_n$  sind mit Lagrange-Polynomen  $\ell_i$  und Polynomen  $y_i$  ein Linearfall und daher Polynome  $\leq n$  Grades.