

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

Man berechne die Kurvenintegrale (2. Art) und zeichne die zugehörigen Kurven unter Verwendung der MATLAB-Routinen 'plot' und 'plot3':

a) für das Vektorfeld $\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ xy \end{pmatrix}$ längs der Geraden vom Ursprung zum Punkt $P = (1, 1)$,

b) für das Vektorfeld $\mathbf{f}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$ längs der Kurve $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, t)^T$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Aufgabe 22:

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(x + y) + \frac{1}{x^2 + 1} \\ \cos(x + y) + e^{y+z} + \frac{y}{y^2 + 1} \\ e^{y+z} + \frac{z^2}{z^2 + 1} \end{pmatrix}.$$

- Man zeige, dass \mathbf{f} ein Potential besitzt, ohne es zu berechnen.
- Man berechne ein Potential von \mathbf{f} durch Hochintegrieren und
- mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.
- Man zeichne die Kurven \mathbf{c}_i , $i = 1, 2$ unter Verwendung der MATLAB-Routine 'plot3' und berechne die Kurvenintegrale $\int_{\mathbf{c}_i} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$:
 - $\mathbf{c}_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{c}_1(t) = (0, \cos t, \sin t)^T$,
 - $\mathbf{c}_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{c}_2(t) = (t, t^2, t^3)^T$.

Aufgabe 23:

Man berechne den Schwerpunkt von M bei homogener Dichte ρ :

a) $M = \left\{ (x, y, z) \mid z \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1 \right\}$

b) $M = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \cos \frac{\pi}{4} x \right\}$.

Aufgabe 24:

Man berechne mit Hilfe des Transformationssatzes:

a) Die Fläche der Ellipse

$$E = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} .$$

b) Man integriere

$$f(x, y, z) := \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

über die Einheitskugel und über das im positiven Oktanten $x, y, z \geq 0$ liegende Achtel der Einheitskugel!

Abgabetermin: 21.1. - 25.1.2008 (zu Beginn der Übung)