Analysis III, SS08, 15.09.2008, (Iske)

Aufgabe 1:

a) Man berechne das Taylor-Polynom 2. Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ der folgenden Funktion

$$h(x, y) = \cos(x^2 + y^2) \;.$$

b) Man berechne und klassifiziere die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \left(\frac{x + y}{2}\right)^2$$

unter der Nebenbedingung $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\boldsymbol{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 e^y + x\sin(x^2) \\ x^3 e^y + y^3 \end{pmatrix} .$$

(i) Man zeige, dass $\boldsymbol{f}$ ein Potential besitzt, ohne es zu berechnen.

(ii) Man konstruiere (kein Raten) ein Potential von $\boldsymbol{f}$.

(iii) Für die Kurve

$$\boldsymbol{c} : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2 \;, \quad \boldsymbol{c}(t) = (\sin 2t, \cos t)^T$$

berechne man das Kurvenintegral $\displaystyle\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$.

b) Man skizziere die Fläche

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le y \le 1 - |x| \right\}$$

und berechne mit der Dichte $\rho(x, y) = 1 - x + 2y$ ihre Masse.