*Analysis III, WS07/08, 26.02.2008, (Iske)*

**Aufgabe 1:**

Gegeben sei die durch

$$f(x,y) = \frac{3x^2}{2} + x^3 - y^3 + 3y$$

definierte Funktion.

a) Man bestimme alle stationären Punkte von $f$ und klassifiziere sie.

b) Man berechne die Ableitung von $f$ im Punkt $(0,0)$ in Richtung $\boldsymbol{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$.

c) Man bestimme die Tangentialebene bzgl. $f$ im Punkt $(-1,-1)$.

d) Man überprüfe, ob sich die Niveaumenge von $f$, die durch den Punkt $P = (1,1)$ festgelegt wird, in einer Umgebung von $P$ eindeutig durch eine $C^1$-Funktion darstellen lässt und entscheide ggf., ob man nach der Variablen $x$ oder $y$ auflösen kann.

**Aufgabe 2:**

Gegeben seien der Körper

$$K = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \le 9\,,\ x \le 0 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(y, -x, z^3\right)^T .$$

a) Man skizziere $K$.

b) Der Rand von $K$ ist beschreibbar durch ein ebenes Flächenstück $S$ und ein nicht ebenes Flächenstück $H$.

Man gebe jeweils Parametrisierungen für die beiden Randflächenstücke $S$ und $H$ an.

c) Man berechne jeweils den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch die beiden Randflächenstücke $S$ und $H$.

d) Man berechne das Volumenintegral $\displaystyle\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y,z)\, d(x,y,z)\,.$