Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Armin Iske
Department Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Wintersemester 2007/2008

Informationsquellen.

- **Internetseiten.**
  www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/
- **Vorlesung.**
  Donnerstag, 09:00-10:30, SBS95, Audimax 1, ab 25.10.2007.
- **Anleitung zu den Übungen.**
  Dr. Kai Rothe. Donnerstag, 16:00–18:00, SBS95, Audimax 1, 14–tägig.
  Beginn: 25. Oktober 2007.
- **Übungen in Tutorgruppen.**
  Dr. Kai Rothe und Übungsgruppenleiter(innen).
  Beginn: 29. Oktober 2007.
- **Sprechstunde.**
  - **Prof. Iske:** Donnerstag, 11:00-12:00 Uhr, SBS95, 2.073.
  - **Dr. Rothe:** Montag, 13:45-14:45 Uhr, SBS95, 2.073.

Literaturquellen.

PRIMÄR:

- R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure 2, 3. Auflage. WILEY-VCH, Berlin, 2000.
- H. J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar: Mathematik für Ingenieure, Band 3: Aufgaben und Lösungen. WILEY-VCH, Berlin, 2000.

SEKUNDÄR:

- K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik, Bände 1 und 2. Springer, Berlin.
- K. Burg, H. Haf, F. Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure, Band 1: Analysis. B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

Inhalte Analysis III.

Differential- und Integralrechung mehrerer Variabler:

- **Partielle Ableitungen, Differentialoperatoren.**
- **Vektorfelder, vollständiges Differential, Richtungsableitungen.**
- **Mittelwertsätze, Satz von Taylor.**
- **Extrema, Satz über implizite Funktionen.**
- **Implizite Darstellung von Kurven und Flächen.**
- **Extrema bei Gleichungsnebenbedingungen.**
- **Newton-Verfahren, nichtlineare Gleichungen und Ausgleichsrechnung.**
- **Bereichsintegrale, Satz von Fubini, Transformationssatz.**
- **Potentiale, Integralsatz von Green, Integralsatz von Gauß.**
- **Greensche Formeln, Integralsatz von Stokes.**

17 Differentialrechnung mehrerer Variabler

17.1 Partielle Ableitungen

Im folgenden sei

$f(x_1, \dots, x_n)$ eine skalare Funktion, die von n Variablen abhängt.

Beispiel: Die Zustandsgleichung eines idealen Gases lautet $pV = RT$.

Jede der drei Größen, p (Druck), V (Volumen), T (Temperatur), lässt sich wie folgt als Funktion der anderen darstellen, wobei R die universelle Gaskonstante.

$$\begin{aligned} p &\equiv p(V,T) = \frac{RT}{V} \\ V &\equiv V(p,T) = \frac{RT}{p} \\ T &\equiv T(p,V) = \frac{pV}{R} \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen.

Definition: *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $f : D \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x}^0 \in D$.

- $f(\mathbf{x})$ *heißt in* $\mathbf{x}^0$ *nach* x_i partiell differenzierbar, *falls der Grenzwert*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) &:= \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}^0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + t, \ldots, x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n)}{t}\end{aligned}$$

  existiert, wobei $\mathbf{e}_i$ *den* i*-ten Einheitsvektor bezeichnet. Den Grenzwert nennt man die* partielle Ableitung *von* $f(\mathbf{x})$ *nach* x_i *im Punkt* $\mathbf{x}^0$.

- *Existieren für jeden Punkt* $\mathbf{x}^0 \in D$ *die partiellen Ableitungen nach jeder Variablen* x_i, $i = 1, \ldots, n$ *und sind diese* **stetige Funktionen**, *so nennt man* $f(\mathbf{x})$ stetig partiell differenzierbar *oder eine* C^1-Funktion.

□

Beispiele.

- Betrachte die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Für einen Punkt $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$ existieren beide partiellen Ableitungen und diese sind auch stetig:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0) = 2x_1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}^0) = 2x_2$$

Die Funktion f ist also eine C^1-Funktion.

- Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1 + |x_2|$$

ist im Punkt $\mathbf{x}^0 = (0,0)^T$ partiell differenzierbar nach der Koordinate x_1, aber die partielle Ableitung nach x_2 existiert im Ursprung **nicht**!

$\square$

Konkretes technisches Beispiel.

Der Schalldruck einer eindimensionalen Schallwelle ist gegeben durch

$$p(x,t) = A\sin(\alpha x - \omega t)$$

Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha A \cos(\alpha x - \omega t)$$

beschreibt zu einer festen Zeit t die örtliche Änderungsrate des Schalldrucks.

Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\omega A \cos(\alpha x - \omega t)$$

beschreibt für einen festen Ort x die zeitliche Änderung des Schalldruckes. $\square$

Differentiationsregeln.

- Sind f, g partiell nach x_i differenzierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gelten die Regeln

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})\Big) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})\Big) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})^2} \qquad \text{für } g(\mathbf{x}) \neq 0$$

- Man verwendet alternativ die Bezeichnungen

$$D_i f(\mathbf{x}^0) \qquad \text{oder} \qquad f_{x_i}(\mathbf{x}^0)$$

für die partielle Ableitung von $f(\mathbf{x})$ nach x_i in $\mathbf{x}^0$.

□

Gradient und Nabla-Operator.

Definition: *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen, und partiell differenzierbar.*

- *Man bezeichnet den* **Zeilenvektor**

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \right)$$

  als `Gradient` *von* $f(\mathbf{x})$ *in* $\mathbf{x}^0$.

- *Weiterhin bezeichnet man den symbolischen Vektor*

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$$

  als `Nabla-Operator`.

- *So bekommt man den* **Spaltenvektor**

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0) \right)^T .$$

□

Weitere Differentiationsregeln. Seien $f(\mathbf{x})$ und $g(\mathbf{x})$ partiell differenzierbar. Dann gelten die folgenden Differentiationsregeln.

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\alpha f + \beta g) &= \alpha \cdot \operatorname{grad} f + \beta \cdot \operatorname{grad} g \\ \operatorname{grad}(f \cdot g) &= g \cdot \operatorname{grad} f + f \cdot \operatorname{grad} g \\ \operatorname{grad}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{1}{g^2}(g \cdot \operatorname{grad} f - f \cdot \operatorname{grad} g) \qquad \text{für } g \neq 0\end{aligned}$$

Beispiele:

- Sei $f(x,y) = e^x \cdot \sin y$. Dann gilt:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (e^x \cdot \sin y, e^x \cdot \cos y) = e^x(\sin y, \cos y)$$

- Für $r(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ gilt

$$\operatorname{grad} r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{r(\mathbf{x})} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \qquad \text{für } (\mathbf{x} \neq 0),$$

wobei $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ Zeilenvektor.

Partiell differenzierbar impliziert nicht Stetigkeit.

Beobachtung: Eine (nach allen Koordinaten) partiell differenzierbare Funktion ist im Allgemeinen **nicht** stetig.

Gegenbeispiel: Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0 \end{cases}$$

Die Funktion $f(x,y)$ ist auf **ganz** $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= f_y(0,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y}{(x^2+y^2)^2} - 4\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^3} \qquad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x}{(x^2+y^2)^2} - 4\frac{x y^2}{(x^2+y^2)^3} \qquad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \end{aligned}$$

Beispiel (Fortsetzung).

Berechnung der partiellen Ableitungen im Ursprung $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t\cdot 0}{(t^2+0^2)^2}-0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{0\cdot t}{(0^2+t^2)^2}-0}{t} = 0$$

Aber: Im Nullpunkt $(0,0)$ ist die Funktion **nicht** stetig, denn

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n^4}} = \frac{n^2}{4} \to \infty$$

und somit gilt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0) = 0.$$

$\square$

Bemerkung. Um die Stetigkeit einer partiell differenzierbaren Funktion f zu garantieren, benötigt man somit zusätzliche Voraussetzungen an f.

Satz: *Ist* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen, in einer Umgebung von* $\mathbf{x}^0 \in D$ *partiell differenzierbar, und sind die partiellen Ableitungen* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, *dort* **beschränkt**, *so ist* $f(\mathbf{x})$ **stetig** *in* $\mathbf{x}^0$.

Beachte: In unserem vorigen Beispiel sind die partiellen Ableitungen von f in einer Umgebung der Null $(0, 0)$ **nicht** beschränkt, denn es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} - 4\frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^3} \qquad \text{für } (x, y) \neq (0, 0).$$

$\square$

Beweis des Satzes.

Für $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\|_\infty < \varepsilon$, mit $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, schreiben wir:

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) \quad &= \quad (f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n) - f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^0)) \\
&+ \quad (f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^0) - f(x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1}^0,x_n^0)) \\
&+ \quad (f(x_1,\dots,x_{n-1}^0,x_n^0) - f(x_1,\dots,x_{n-2}^0,x_{n-1}^0,x_n^0)) \\
&\;\;\vdots \\
&+ \quad (f(x_1,x_2^0,\dots,x_n^0) - f(x_1^0,\dots,x_n^0))
\end{aligned}
$$

Für jede Differenz auf der rechten Seite betrachten wir f als univariate Funktion:

$$g(x_n) - g(x_n^0) := f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n) - f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^0)$$

Da f partiell differenzierbar, ist g differenzierbar und es gilt der Mittelwertsatz

$$g(x_n) - g(x_n^0) = g'(\xi_n)(x_n - x_n^0)$$

für ein geeignetes ξ_n zwischen x_n und x_n^0.

Vollendung des Beweises.

Anwendung des **Mittelwertsatzes** auf jeden Term der rechten Seite ergibt somit

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) &= \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi_n) \cdot (x_n - x_n^0) \\
&+ \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-2}, \xi_{n-1}, x_n^0) \cdot (x_{n-1} - x_{n-1}^0) \\
&\vdots \\
&+ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) \cdot (x_1 - x_1^0)
\end{aligned}
$$

Mit der Beschränktheit der partiellen Ableitungen gilt

$$
|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)| \leq C_1|x_1 - x_1^0| + \ldots + C_n|x_n - x_n^0|
$$

für $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty < \varepsilon$, und damit ist $f(\mathbf{x})$ **stetig** in $\mathbf{x}^0$, denn es gilt

$$
f(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x}^0) \qquad \text{für } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_\infty \to 0. \qquad \blacksquare
$$

Folgerung: Stetig partiell differenzierbare Funktionen sind stetig, d.h. $C^1 \subset C^0$.

Höhere Ableitungen.

Definition: *Eine skalare Funktion* $f(\mathbf{x})$ *sei auf einer offenen Menge* $D \subset \mathbb{R}^n$ *partiell differenzierbar. Sind die partiellen Ableitungen von* f *erneut partiell differenzierbar, so erhält man sämtliche* `partiellen Ableitungen zweiter Ordnung` *von* f *mit*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \qquad \textit{für } i, j = 1, \ldots, n.$$

Beispiel: Partielle Ableitungen zweiter Ordnung einer Funktion $f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Seien nun $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$. Dann definiert man rekursiv

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_{k-2}} \ldots \partial x_{i_1}}\right)$$

$\square$

Ableitungen höherer Ordnung.

Definition: *Die Funktion* $f(\mathbf{x})$ *heißt* k-fach partiell differenzierbar, *falls alle Ableitungen*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}} \qquad \text{für alle } i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$$

der Ordnung k *auf* D *existieren.*

Alternative Notation:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}} = D_{i_k} D_{i_{k-1}} \ldots D_{i_1} f = f_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}$$

Sind alle Ableitungen k*-ter Ordnung stetig, so heißt die Funktion* $f(\mathbf{x})$ k-fach stetig partiell differenzierbar *oder auch* C^k-Funktion *auf* D. *Stetige Funktionen* $f(\mathbf{x})$ *nennt man* C^0-Funktionen. □

Beispiel: Für die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^i$ gilt $\frac{\partial^n f}{\partial x_n \ldots \partial x_1} = ?$

Partielle Ableitungen nicht beliebig vertauschbar.

ACHTUNG: Die Reihenfolge, in der die partiellen Ableitungen durchzuführen sind, ist im Allgemeinen **nicht** beliebig vertauschbar!

Beispiel: Für die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

berechnet man direkt

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = -1 \\ f_{yx}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = +1 \end{aligned}$$

d.h. $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$. □

Vertauschbarkeitssatz von Schwarz.

Satz: *Ist* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen, eine* C^2*-Funktion, so gilt*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_n) \qquad \textit{für alle } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Beweisidee: Zweifache Anwendung des Mittelwertsatzes (**Übung**). □

Folgerung: Ist $f(\mathbf{x})$ eine C^k-Funktion, so kann man die Reihenfolge der Differentiationen zur Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur k-ten Ordnung **beliebig** vertauschen! □

Beispiel. Berechne für die Funktion

$$f(x,y,z) = y^2 z \sin(x^3) + (\cosh y + 17e^{x^2})z^2$$

die partielle Ableitung dritter Ordnung f_{xyz}.

Die Reihenfolge der partiellen Ableitungen ist beliebig vertauschbar, da $f \in C^3$.

- Differenziere zunächst nach z:

$$f_z(x,y,z) = y^2 \sin(x^3) + 2z(\cosh y + 17e^{x^2})$$

- Differenziere dann f_z nach x (damit fällt $\cosh y$ raus):

$$\begin{aligned} f_{zx}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 \sin(x^3) + 2z(\cosh y + 17e^{x^2})\right) \\ &= 3x^2y^2\cos(x^3) + 68xze^{x^2} \end{aligned}$$

- Für die partielle Ableitung von f_{zx} nach y erhalten wir schließlich

$$f_{xyz}(x,y,z) = 6x^2 y \cos(x^3)$$

Der Laplace-Operator. Der Laplace-Operator ist definiert durch

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Für eine skalare Funktion $u(\mathbf{x}) = u(x_1, \ldots, x_n)$ gilt somit

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{x_1 x_1} + \ldots + u_{x_n x_n}.$$

- Beispiele für (relevante) partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 \qquad \text{(Wellengleichung)}$$

$$\Delta u - \frac{1}{k} u_t = 0 \qquad \text{(Wärmeleitungsgleichung)}$$

$$\Delta u = 0 \qquad \text{(Laplace-Gleichung oder Potentialgleichung)}$$

- Falls $\Delta u = 0$, so heißt f harmonisch.

Beispiel: Für $u(x) \equiv u(r(x))$, kurz $u = u(r)$, wobei $r = \|x\|_2$, gilt

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(r) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u'(r) \frac{x_i}{r} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ u''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + u'(r) \frac{r - x_i^2/r}{r^2} \right\} \\
&= \frac{u''(r)}{r^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{u'(r)}{r^3} \sum_{i=1}^{n} (r^2 - x_i^2) \\
&= u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r).
\end{aligned}
$$

$\square$